BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC THĂNG LONG

Nguyễn Văn Hồng

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 9460112

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội – 2024

Luận án được viết dựa trên kết quả nghiên cứu của tác giả, các công trình nghiên cứu được thực hiện tại trường Đại học Thăng Long.

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

1. PGS. TS. Phạm Ngọc Anh

2. GS. TSKH. Lê Dũng Mưu

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án được bảo vệ tại Hội đồng đánh giá Luận án Tiến sĩ trường Đại học Thăng Long: $\cdots$ lúc $\cdots$ giờ $\cdots$, ngày $\cdots$ tháng $\cdots$ năm $\cdots$.

Luận án được công bố rộng rãi tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam.
- Thư viện trường Đại học Thăng Long.

Mục lục

MỞ ĐẦU

Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Trải qua hơn nửa thế kỷ hình thành và phát triển, lý thuyết bài toán cân bằng đã dần khẳng định được vai trò cũng như sự phát triển của mình trong Lý thuyết tối ưu, Toán học ứng dụng và các mô hình thực tế.

Bài toán EP(C, f) đã được các tác giả Nikaido H. và Isoda K. giới thiệu lần đầu tiên năm 1955 khi tổng quát hóa mô hình cân bằng Nash trong lý thuyết trò chơi không hợp tác. Sau đó, Kỳ Fan (1972) xét bài toán này dưới dạng một bất đẳng thức minimax và sự tồn tại nghiệm của bài toán được chỉ ra với điều kiện là tập lồi, compact của tập C và song hàm f là tựa lồi trên C. Kết quả này của Ky Fan được mở rộng bởi Brezis H. và đồng nghiệp trong (1987). Năm 1992, các tác giả Muu L.D. và Oettli W. gọi bài toán này là bài toán cân bằng và đề xuất thuật toán hàm phạt tìm nghiệm của bài toán cân bằng khi song hàm f đơn điệu. Sau đó, năm 1994, các tác giả Blum E. và Oettli W. tiếp tục nghiên cứu về bài toán cân bằng. Sau khi nghiên cứu của Blum E. và Oettli W. được công bố, bài toán cân bằng đã thu hút sự chú ý của rất nhiều các nhà nghiên cứu.

Về mặt hình thức, bài toán EP(C, f) có dạng khá đơn giản nhưng nó chứa đựng được nhiều lớp bài toán quan trọng thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau như: bài toán tối ưu, bài toán điểm yên ngựa, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng Nash. Từ kết quả của các bài toán riêng lẻ nói trên, với những điều chỉnh phù hợp ta có thể mở rộng cho bài toán cân bằng tổng quát. Điều này giải thích vì sao bài toán cân bằng mặc dù mới được chú ý gần đây nhưng đã có rất nhiều các công trình của các nhà khoa học quan tâm nghiên cứu.

Bên cạnh các nghiên cứu liên quan đến bài toán cân bằng, một lớp bài toán khác được đề cập trong luận án này là bài toán điểm bất động. Lý thuyết điểm bất động đã ra đời khoảng một thế kỷ và phát triển mạnh mẽ trong những thập kỷ gần đây. Sự ra đời của nguyên lý điểm bất động Brouwer (1912) và ánh xạ co Banach (1922) đã hình thành 2 hướng chính của lý thuyết điểm bất động: Sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ liên tục và sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ co. Nguyên lý điểm bất động Brouwer và nguyên lý ánh xạ co Banach là kết quả khởi đầu cho lý thuyết điểm bất động. Những năm 60 của thế kỷ 20, nguyên lý điểm bất động dạng co được phát triển mạnh mẽ. Lý thuyết này cho phép ta xây dựng thuật toán tìm nghiệm của bài toán.

Trong những năm gần đây, nhiều nhà nghiên cứu đã quan tâm đến bài toán tìm nghiệm của bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán cân bằng khác hoặc tìm nghiệm của bài toán cân bằng trên tập điểm bất động chung của các ánh xạ. Lớp bài toán này được gọi là bài toán cân bằng hai cấp. Cùng các hướng nghiên cứu định tính, hướng nghiên cứu về phương pháp giải và ứng dụng bài toán này vào trong các mô hình thực tế đóng một vai trò rất quan trọng.

Nhận ra tầm quan trọng và sự cần thiết của việc nghiên cứu các thuật giải hữu hiệu trên máy tính, có ứng dụng trong các mô hình thực tiễn, luận án "Một số phương pháp giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động" đề xuất các thuật toán mới, ứng dụng tính toán trên phần mềm Matlab với các số liệu cụ thể.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án và danh mục tài liệu tham khảo, luận án gồm 3 chương. Các kết quả chính của luận án được viết ở các chương 2 và chương 3.

Các kết quả chính của luận án được viết dựa trên 04 bài báo, trong đó 03 bài xuất bản trên tạp chí SCIE, 01 bài báo đã gửi đăng trên tạp chí SCIE.

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản về bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm cơ bản cũng như các kết quả bổ trợ cần thiết được sử dụng ở các chương sau.

Nội dung chương được trình bày thành ba phần chính. Phần đầu tiên nhắc lại những khái niệm cần thiết về Giải tích hàm, Giải tích lồi có liên quan đến luận án. Phần thứ hai giới thiệu về bài toán cân bằng, các trường hợp riêng của nó cùng một số điều kiện về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng. Phần cuối của chương trình bày về bài toán điểm bất động và một số phương pháp lặp cơ bản được dùng để giải bài toán này.

Nội dung chương được viết dựa trên các tài liệu Cegielski, A. (2013), Konnov, I.V. (2001), Muu, L.D. (2016), Facchinei, F. (2003), Fan, K. (1972), Giannessi, F. (2004).

1.1 Không gian Hilbert

1.2 Bài toán cân bằng

1.2.1 Bài toán cân bằng và một số bài toán liên quan

1.2.2 Điều kiện tồn tại nghiệm

1.3 Bài toán cân bằng trên tập điểm bất động

1.3.1 Phát biểu bài toán

1.3.2 Một số thuật toán thông dụng

Chương 2

Các phương pháp chiếu mở rộng

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số phương pháp chiếu để giải bài toán cân bằng (2.1) trên tập điểm bất động trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ với giả thiết song hàm f là đơn điệu mạnh và có tập dưới vi phân xấp xỉ là liên tục Lipschitz theo kiểu Hausdorff trên tập C. Thuật toán đầu là sự kết hợp kỹ thuật dưới đạo hàm xấp xỉ của Santos P. (2011) và lược đồ hướng giảm lai ghép của Yamada I. (2013). Ở Thuật toán thứ hai, chúng tôi kết hợp kỹ thuật lặp điểm bất động của Mann W.R. (2003) và phương pháp dưới đạo hàm song song để giải bài toán (2.1) khi $C = \mathbb{H}$.

Xuất phát từ ý tưởng của phương pháp đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng và phép lặp Mann giải bài toán điểm bất động (Anh, P.N., 2013), với kỹ thuật chiếu song song của tác giả Anh P.N. (2020) và của Strodiot J.J., Hai T.N. (2022, 2012), trong mục 2.4, chúng tôi đề xuất một thuật toán chiếu mới giải bài toán (2.7). Các tính toán minh họa của thuật toán và kết quả so sánh với các thuật toán khác cũng được trình bày chi tiết ở các mục 2.3 và 2.4.3. Nội dung của chương này được viết dựa trên hai bài báo [CT1., CT4.] trong Danh mục công trình khoa học đã được công bố.

Bài toán cân bằng trên tập điểm bất động (2.1) được phát biểu dưới dạng:

Cho $S_i : C \to C$ $(i \in I := \{1, 2, \ldots, p\})$ là ánh xạ β_i-nửa co.

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in \Omega, \tag{2.1}$$

ở đây $\Omega = \cap_{i\in I} Fix(S_i)$ và $Fix(S_i) := \{x \in C : S_i(x) = x\}$.

2.1 Phương pháp chiếu song song xấp xỉ

Thuật toán 2.1. ***Khởi tạo:*** *Lấy điểm bất kỳ* $x^0 \in C$.

Bước lặp: $k = 1, 2, \cdots$

Bước 1. Chọn các tham số thỏa mãn điều kiện sau:

$$\begin{cases} \tau \in (0, \beta), 0 < \tau_k \leq \gamma_k < \min\left\{\frac{2\beta}{L^2}, \frac{2(\beta-\tau)}{L^2-\tau^2}, \frac{1}{\tau}\right\}, \\ 0 < a \leq \alpha_{k,i} < \min\left\{\frac{1-\beta_i}{2} : i \in I\right\}, \\ \epsilon_k \leq \gamma_k, \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 < +\infty, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau_k < +\infty. \end{cases} \tag{2.2}$$

Bước 2. Tính

$$\begin{cases} y_i^k = (1 - \alpha_{k,i})x^k + \alpha_{k,i} S_i(x^k), \quad \forall i \in I, \\ y^k := y_{i_0}^k, \ \text{với } i_0 \in \operatorname{argmax}\{\|y_i^k - x^k\| : i \in I\}, \\ x^{k+1} \in Pr_C^{\epsilon_k}(y^k - \gamma_k u^k), u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(y^k, y^k). \end{cases} \tag{2.3}$$

Bước 3. Đặt $k := k + 1$ *và quay lại Bước 1.*

Để chứng minh sự hội tụ của dãy lặp xác định bởi thuật toán 2.1, trước tiên, chúng tôi chứng minh được bổ đề 2.1.

Bổ đề 2.1. *Cho* C *là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian thực* $\mathbb{H}$, $g : C \times C \to \mathbb{R}$ *là một song hàm cân bằng,* $g(x, x) = 0$ *với mọi*

$x \in C$. Với mỗi $x \in C$, $g(x,y)$ nửa liên tục dưới, lồi, khả dưới vi phân theo y trên C. Cho $\epsilon \geq 0$, g là β-đơn điệu mạnh trên C và $\partial_2^\epsilon g(x,x)$ là compact, liên tục Lipschitz với hằng số $L > 0$ trên C sao cho $\beta \leq L$. Khi đó, ánh xạ đa trị

$$S(x) := \{x - \gamma w_x : w_x \in \partial_2^\epsilon g(x,x), x \in C\}, \quad \forall x \in C,$$

là $2\sqrt{\gamma\epsilon}-$co với hằng số $\delta = \sqrt{1-\gamma(2\beta - \gamma L^2)}$ dưới điều kiện $\gamma \in \left(0, \frac{2\beta}{L^2}\right)$.

Ngoài ra, chúng tôi cũng dùng đến một số bổ đề cơ bản được phát biểu lại dưới đây.

Bổ đề 2.2. *Cho $\{a_k\}$ và $\{\delta_k\}$ là các dãy số không âm thỏa mãn*

$$a_{k+1} \leq a_k + \delta_k, \quad \forall k \geq 0,$$

với $\{\delta_k\}$ với $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty$. Khi đó, tồn tại giới hạn $\lim_{k\to\infty} a_k < \infty$.

Bổ đề 2.3. *Cho $\{a_k\}$ là dãy số không âm. Giả sử rằng với mỗi số nguyên m, tồn tại một số nguyên p sao cho $p \geq m$ và $a_p \leq a_{p+1}$. Cho k_0 là một số nguyên sao cho $a_{k_0} \leq a_{k_0+1}$ và xác định, với mọi số nguyên $k \geq k_0$,*

$$\tau(k) = \max\{i \in \mathcal{N} : k_0 \leq i \leq k, a_i \leq a_{i+1}\}.$$

Khi đó, $0 \leq a_k \leq a_{\tau(k)+1}$ với mọi $k \geq k_0$. Hơn nữa, dãy $\{\tau(k)\}_{k\geq k_0}$ là không giảm và dần tới $+\infty$ khi $k \to \infty$.

Bổ đề 2.4. *Giả sử rằng $S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ là một ánh xạ $m-$nửa co sao cho $Fix(S) \neq \emptyset$ và $\alpha \in [0, 1-m]$. Khi đó, ánh xạ $S_\alpha = (1-\alpha)I + \alpha S$ là tựa không giãn trên $\mathbb{H}$. Hơn nữa,*

$$\|S_\alpha(x) - x^*\|^2 \leq \|x - x^*\|^2 - \alpha(1-m-\alpha)\|S(x) - x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{H}, x^* \in Fix(S).$$

Bổ đề 2.5. *Cho* $\{a_k\} \subset \mathbb{R}_+$ *là dãy số thỏa mãn bất đẳng thức*

$$a_{k+1} \leq (1-\alpha_k)a_k + \alpha_k\delta_k$$

với $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ *và* $\{\delta_k\} \subset \mathbb{R}$. *Nếu* $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = +\infty$ *và* $\limsup_{k\to\infty} \delta_k \leq 0$, *thì* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Sử dụng bổ đề 2.1 và các bổ đề được nhắc lại ở trên, chúng tôi chứng minh được sự hội tụ của phương pháp chiếu song song qua định lý 2.1.

Định lý 2.1. *Cho* $f : C \times C \to \mathbb{R}$ *là* β *đơn điệu mạnh, liên tục yếu,* $\epsilon \geq 0$, $x \in C$, $\partial_2^\epsilon f(x,x)$ *compact, liên tục Lipschitz với hằng số* $L > 0$ *trên* $\mathbb{H}$ *sao cho* $\beta \leq L$. *Với mỗi* $i \in I$, *ánh xạ* $S_i : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *là* β_i-*nửa co sao cho tập* $\Omega \neq \emptyset$. *Khi đó, dãy* $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ *sinh ra bởi thuật toán hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất* x^* *của bài toán* (2.1).

2.2 Phương pháp dưới đạo hàm song song

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu phương pháp chiếu dưới đạo hàm song song giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động và chứng minh sự hội tụ của thuật toán với giả thiết f là song hàm $\beta-$đơn điệu mạnh, liên tục yếu với mỗi $\epsilon \geq 0$, $x \in \mathbb{H}$. Để chứng minh sự hội tụ của dãy lặp $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ ta cần tính phép chiếu khoảng cách lên tập C ở mỗi bước lặp. Ta có thuật toán sau:

Thuật toán 2.2. ***Khởi tạo:*** *Lấy điểm bất kỳ* $x^0 \in \mathbb{H}$.

Các bước lặp: $k = 1, 2, \cdots$

Bước 1. Xây dựng dãy các dãy tham số dương

$$
\begin{cases}
\tau \in (0, \beta), 0 < \tau_k \le \gamma_k < \min\left\{\frac{2\beta}{L^2}, \frac{2(\beta-\tau)}{L^2-\tau^2}, \frac{1}{\tau}\right\}, 0 < a \le \alpha_{k,i} < \min\left\{\frac{1-\beta_i}{2} : i \in I\right\}, \\
\epsilon_k \le \gamma_k, \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 < +\infty, \\
\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau_k < +\infty, \mu \in \left(0, \frac{2\beta}{L^2}\right), \\
\beta_k \in \left(0, 1 - \gamma_k(1 - \sqrt{1 - 2\mu\beta + \mu^2 L^2})\right).
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

Bước 2. Tính

$$
\begin{cases}
y_i^k = (1 - \alpha_{k,i})x^k + \alpha_{k,i} S_i(x^k), \quad \forall i \in I, \\
y^k := y_{i_0}^k, \ \text{với } i_0 = \operatorname{argmax}\{\|y_i^k - x^k\| : i \in I\}, \\
x^{k+1} = \beta_k x^k + (1 - \beta_k) y^k - \mu \gamma_k u^k, u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(y^k, y^k).
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

Bước 3. Đặt $k := k + 1$ và quay lại Bước 1.

Sự hội tụ của thuật toán được chứng minh trong Định lý 2.2.

Định lý 2.2. *Cho song hàm $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ là $\beta-$đơn điệu mạnh, liên tục yếu. Với mọi $\epsilon > 0$, $\partial_2^{\epsilon} f(x, x)$ compact, liên tục Lipschitz với hằng số L sao cho $\beta \le L$. Với mỗi $i \in I$, ánh xạ $S_i : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ là β_i- bán co, $\Omega \neq \emptyset$. Khi đó, các dãy $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.2 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x^* của bài toán* (2.1).

2.3 Một số ví dụ minh họa và kết quả tính toán

Trong mục này, chúng tôi sẽ thực hiện một số tính toán minh họa sự hội tụ mạnh của các dãy lặp được sinh ra từ thuật toán. Chúng tôi cũng so sánh thuật toán đề xuất với phương pháp kiểu dưới đạo hàm $((STM))$ của Iiduka và Yamada (2009) (Thuật toán 3.2), phương pháp dưới đạo hàm tăng cường của Anh, P.N. và Kim, J.K., Muu, L.D. (2012).

2.4 Phương pháp chiếu dưới đạo hàm tăng cường song song

Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng trong $\mathbb{H}$, các song hàm cân bằng $f : C \times C \to \mathbb{R}$, $g_j : C \times C \to \mathbb{R}$, $f(x,x) = 0, g_j(x,x) = 0$ với mọi $x \in C, j \in J$, $I = \{1, \cdots, r\}, J = \{1, \cdots, m\}$. Bài toán cân bằng cho song hàm f trên C được phát biểu như sau: Tìm $\bar{x} \in C$ sao cho

$$f(\bar{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in C. \tag{2.6}$$

Ký hiệu tập nghiệm của bài toán này là $S_{(C,f)}$.

Trong chương này, chúng tôi xét một trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng hai cấp:

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \ \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in \Omega, \tag{2.7}$$

với $Fix(S_i)$ là tập các điểm bất động của các ánh xạ nửa co $S_i : C \to C (i \in I)$ và $\Omega = \cap_{i \in I} Fix(S_i) \cap S_{(C,g_j)},\ j \in J$.

Sự hội tụ của các dãy lặp sinh bởi thuật toán được chứng minh trong Định lý 2.3 dưới các giả thiết tương đối nhẹ. Các kết quả tính toán trong không gian vô hạn cũng như hữu hạn chiều được đưa ra để minh họa cho các bước tính toán và sự hội tụ của các dãy lặp sinh bởi thuật toán.

2.4.1 Thuật toán và định lý hội tụ

Trong phần này chúng tôi sẽ trình bày các bước tính toán của thuật toán với kỹ thuật xấp xỉ dưới đạo hàm và phép chiếu khoảng cách xấp xỉ.

Thuật toán 2.3. ***Khởi tạo:*** *Lấy điểm bất kỳ* $x^0 \in C$.

Các bước lặp: $k = 1, 2, \cdots$

Bước 1. Xây dựng dãy các tham số

$$\begin{cases} \tau \in (0,\beta), \tau_k \le \gamma_k < \min\left\{\frac{2\beta}{L^2}, \frac{2(\beta-\tau)}{L^2-\tau^2}, \frac{1}{\tau}\right\}, \\ 0 < a \le \alpha_{k,i} \le \min\left\{\frac{1-\beta_i}{2} : i \in I\right\}, \\ 0 < \bar{a} \le \rho_{k,j} \le \bar{b} < \min\left\{\frac{1}{2c_{1j}}, \frac{1}{2c_{2j}} : j \in J\right\}, \\ \epsilon_k \le \gamma_k, \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 < +\infty, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau_k < +\infty. \end{cases} \tag{2.8}$$

Bước 2. Tính

$$\begin{cases} y_i^k = (1-\alpha_{k,i})x^k + \alpha_{k,i} S_i(x^k), \quad \forall i \in I, \\ y^k := y_{i_0}^k, \text{ với } i_0 = \operatorname{argmax}\{\|y_i^k - x^k\| : i \in I\}, \\ z_j^k = \operatorname{argmin}\left\{\rho_{k,j} g_j(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - y^k\|^2 : y \in C\right\}, \\ \bar{z}_j^k = \operatorname{argmin}\left\{\rho_{k,j} g_j(z_j^k, y) + \frac{1}{2}\|y - y^k\|^2 : y \in C\right\}, \\ z^k := \bar{z}_{j_0}^k, \text{ với } j_0 = \operatorname{argmax}\{\|\bar{z}_j^k - y^k\| : j \in J\}, \\ x^{k+1} \in Pr_C^{\epsilon_k}(z^k - \gamma_k u^k), u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(z^k, z^k). \end{cases} \tag{2.9}$$

Bước 3. Đặt $k := k+1$ và quay lại Bước 1.

Để chứng minh định lý về sự hội tụ của phương pháp chiếu song song có sử dụng các kỹ thuật dưới đạo hàm xấp xỉ và phép chiếu khoảng cách xấp xỉ, trước tiên, ta nhắc lại các bổ đề sau:

Bổ đề 2.6. *Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$; $g : C \times C \to \mathcal{R}$ là song hàm cân bằng, $g(x,x) = 0$, với mọi $x \in C$. Với mỗi $x \in C$, $g(x,.)$ là hàm nửa liên tục dưới, lồi, khả dưới vi phân trên C đối với biến thứ 2. Với mỗi $\epsilon \ge 0$, nếu g là đơn điệu mạnh trên C và $\partial_2^{\epsilon} g(x,x)$ là liên tục Lipschitz với hằng số $L > 0$ trên C, khi đó, ánh xạ đa trị*

$$S(x) := \{x - \gamma w_x : w_x \in \partial_2^{\epsilon} g(x,x)\}, \quad \forall x \in C,$$

là $2\sqrt{\gamma\epsilon}-$ *co với hằng số* $\delta = \sqrt{1-\gamma(2\beta-\gamma L^2)}$, $\gamma \in \left(0, \frac{2\beta}{L^2}\right)$.

Bổ đề 2.7. *Cho* C *là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực* $\mathbb{H}$. *Song hàm* $h : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *thỏa mãn các điều kiện:*

- $h(x,x) = 0$ *với mọi* $x \in C$;
- *Với mỗi* $x \in C$, $h(x,\cdot)$ *lồi và khả dưới vi phân trên* C;
- h *giả đơn điệu trên* C;
- h *liên tục kiểu Lipschitz với hằng số* $\gamma_1 > 0$ *và* $\gamma_2 > 0$.

Khi đó, nếu $\lambda \in \left(0, \min\left\{\frac{1}{2\gamma_1}, \frac{1}{2\gamma_2}\right\}\right)$, *thì ánh xạ* S *xác định và với* $x \in C$,

$$y_x = \operatorname{argmin}\left\{\lambda h(x,y) + \frac{1}{2}\|y-x\|^2 : y \in C\right\},$$
$$S(x) = \operatorname{argmin}\left\{\lambda h(y_x,y) + \frac{1}{2}\|y-x\|^2 : y \in C\right\},$$

là tựa không giãn trên C.

Định lý 2.3. *Cho* f *là song hàm* $\beta-$ *đơn điệu mạnh liên tục yếu,* $\partial_2^{\epsilon} f(x,x)$ *liên tục* $L-$ *Lipschitz trên* C. *Với mỗi* $i \in I$, *cho ánh xạ* $S_i : C \to C$ *là* β_i- *nửa co sao cho tập* $\Omega \neq \emptyset$. *Với* $g_j (j \in J)$ *là giả đơn điệu, liên tục yếu, liên tục kiểu Lipschitz với hằng số* c_{1j} *và* c_{2j}. *Khi đó các dãy* $\{x^k\}, \{y^k\}$ *and* $\{z^k\}$ *sinh bởi thuật toán trên hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất* x^* *của bài toán (2.7).*

Tiếp theo, ta giả sử rằng $f, S_i (i \in I)$ và $g : C \times C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ thỏa mãn các giả thiết:

(A_1) Song hàm f là $\beta-$đơn điệu mạnh, liên tục yếu và $\partial_2^{\epsilon} f(x,x)$ liên tục Lipschitz trên C với hằng số $L > 0$ với mọi $\epsilon > 0$;

(A_2) Các ánh xạ $\{S_i : i \in I\}$ là β_i-nửa co;

(A_3) Song hàm g giả đơn điệu, liên tục yếu, liên tục kiểu Lipschitz với các hằng số $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $g(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$.

Nếu $S_i (i \in I)$ là ánh xạ đồng nhất và $g_j = g (j \in J)$ thì ta có hệ quả của Định lý 2.3.

Hệ quả 2.1. *Cho các dãy số dương* $\{\rho_k\}, \{\epsilon_k\}, \{\gamma_k\}$, $\{\tau_k\}$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{cases} \tau \in (0, \beta), 0 < \tau_k \le \gamma_k < \min\left\{\frac{2\beta}{L^2}, \frac{2(\beta-\tau)}{L^2-\tau^2}, \frac{1}{\tau}\right\}, \\ 0 < \bar{a} \le \rho_k \le \bar{b} < \min\left\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\right\}, \\ \epsilon_k \le \gamma_k, \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 < +\infty, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau_k < +\infty. \end{cases}$$

Khi đó, các dãy $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ *được xác định theo lược đồ lặp sau đây:*

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ y^k = \operatorname{argmin}\left\{\rho_k g(x^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\right\}, \\ z^k = \operatorname{argmin}\left\{\rho_k g(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - x^k\|^2 : y \in C\right\}, \\ x^{k+1} \in Pr_C^{\epsilon_k}(z^k - \gamma_k u^k), u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(z^k, z^k), \end{cases} \tag{2.10}$$

hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng hai cấp (2.7).

Khi $g_j = 0$ $(j \in J)$, bài toán (2.7) có dạng bài toán cân bằng trên tập điểm bất động của ánh xạ nửa co S_i $(i \in I)$. Theo Định lý 2.3, lược đồ lặp của bài toán (2.7) và sự hội tụ của các dãy lặp sinh bởi lược đồ được thể hiện qua khẳng định sau

Hệ quả 2.2. *Giả sử rằng các dãy* $\{x^k\}$, $\{z^k\}$ *được xác định như sau:*

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ y_i^k = (1-\alpha_{k,i})x^k + \alpha_{k,i}S_i(x^k), \quad \forall i \in I, \\ y^k := y_{i_0}^k, \text{ với } i_0 = \operatorname{argmax}\{\|y_i^k - x^k\| : i \in I\}, \\ x^{k+1} \in Pr_C^{\epsilon_k}(y^k - \gamma_k u^k), u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(y^k, y^k). \end{cases} \tag{2.11}$$

Các dãy tham số dương $\{\alpha_{k,i}\}(i \in I), \{\epsilon_k\}, \{\gamma_k\}$, $\{\tau_k\}$ *được chọn thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{cases} \tau \in (0,\beta), 0 < \tau_k \le \gamma_k < \min\left\{\frac{2\beta}{L^2}, \frac{2(\beta-\tau)}{L^2-\tau^2}, \frac{1}{\tau}\right\}, \\ 0 < a \le \alpha_{k,i} \le \min\left\{\frac{1-\beta_i}{2} : i \in I\right\}, \\ \epsilon_k \le \gamma_k, \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 < +\infty, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau_k < +\infty. \end{cases}$$

Khi đó, các dãy $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất* x^* *của Bài toán* (2.7).

2.4.2 Tính toán thực nghiệm

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số tính toán số minh họa cho các bước tính toán của lược đồ (2.10), lược đồ (2.11). Các chương trình tính toán được thực hiện trong môi trường MATLAB R2014a trên PC Intel(R) Core(TM) i5-7360U CPU @ 2.30GHz 8.00GB Ram. Chúng tôi cũng so sánh sự hội tụ của các dãy lặp sinh bởi các lược đồ tính toán đề xuất (2.11) với phương pháp kiểu dưới đạo hàm được đưa ra bởi Iiduka H., Yamada I. (2009) (thuật toán 3.2), Scheme (2.3) và thuật toán xấp xỉ co trong của Hai, T.N. (2017) (thuật toán 4.1), Scheme (2.10) và phương pháp dưới đạo hàm xấp xỉ của Anh P.N. (2017) (thuật toán 2).

Chương 3

Phương pháp dưới đạo hàm quán tính

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu thuật toán lặp mới giải bài toán cân bằng trên tập ràng buộc là giao của các tập điểm bất động của ánh xạ nửa co trong không gian Hilbert.

Thuật toán thứ nhất có sử dụng kỹ thuật mới là phương pháp hướng giảm lai ghép, kỹ thuật dưới đạo hàm giải bài toán cân bằng $EQ(\Omega, f)$ với giả thiết song hàm f là đơn điệu mạnh và liên tục kiểu Lipschitz trên $\mathbb{H}$. Thuật toán thứ hai dựa trên các kỹ thuật ngoại suy quán tính, chiếu song song và nguyên lý bài toán phụ. Sự hội tụ mạnh của dãy lặp sinh bởi thuật toán được chứng minh trong các Định lý 3.1, Định lý 3.2 với các điều kiện phù hợp trên bộ tham số.

3.1 Phương pháp dưới đạo hàm quán tính

3.1.1 Thuật toán và định lý hội tụ

Để giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động $\mathrm{EQ}(\Omega, f)$, ta giả sử song hàm f, các ánh xạ S_k $(k \in I)$ và các tham số thỏa mãn các điều kiện:

(A_1) Song hàm f là $\beta-$đơn điệu mạnh, khả dưới vi phân theo biến thứ 2 của f $\partial_2 f(x,x)$ compact và liên tục $L-$Lipschitz;

(A_2) Với mỗi $k \in I$, các ánh xạ S_k là ξ_k-nửa co và thỏa mãn điều kiện (Z), $\Omega := \bigcap_{k\in I} \mathrm{Fix}(S_k) \neq \emptyset$;

(A_3) Với mọi $k \geq 0$, các tham số dương $\beta_k, \gamma_k, \tau_k, \lambda_k$, $\{\mu_k\}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < c_1 \leq \beta_k \leq c_2 < 1, \mu_k \leq \eta, \\ \alpha_k \in (0, 1-\xi_k], \inf_k \alpha_k > 0, \\ 0 < \gamma_k < 1, \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = 0, \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\tau_k}{\gamma_k} = 0, \lambda_k \in \left(\frac{\beta}{L^2}, \frac{2\beta}{L^2}\right), a \in (0,1), \sqrt{1 - 2\lambda_k\beta + \lambda_k^2 L^2} < 1 - a. \end{cases} \tag{3.1}$$

Thuật toán 3.1. (Phương pháp dưới đạo hàm lai ghép quán tính)

Khởi tạo: *Lấy các điểm bất kỳ* $x^0, x^1 \in \mathbb{H}$.

Các bước lặp: $k = 1, 2, \cdots$

Bước 1. Tính tham số quán tính

$$\theta_k = \begin{cases} \min\left\{\mu_k, \dfrac{\tau_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}\right\} & \text{nếu } \|x^k - x^{k-1}\| \neq 0, \\ \mu_k & \text{ngược lại.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Bước 2. Tính

$$\begin{cases} w^k = x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1}) \quad (\text{lặp quán tính}), \\ \bar{S}_k w^k = (1-\alpha_k)w^k + \alpha_k S_k w^k, \\ y^k \in \partial_2 f(w^k, w^k) \quad , \\ z^k = (1-\gamma_k)\bar{S}_k w^k + \gamma_k\left[w^k - \lambda_k y^k\right], \\ \bar{S}_k z^k = (1-\alpha_k)z^k + \alpha_k S_k z^k, \\ x^{k+1} = (1-\beta_k)\bar{S}_k w^k + \beta_k \bar{S}_k z^k. \end{cases} \tag{3.3}$$

Bước 3. Đặt $k := k + 1$ và quay lại Bước 1.

Sự hội tụ mạnh của các dãy lặp sinh bởi thuật toán được chứng minh trong Định lý 3.1

Định lý 3.1. *Giả sử các giả thiết $(A_1) - (A_3)$ thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.1 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x^* của bài toán* $\mathrm{EQ}(\Omega, f)$.

3.1.2 Một số tính toán thực nghiệm

Trong mục này, chúng tôi sẽ thực hiện một số tính toán minh họa sự hội tụ mạnh của các dãy lặp được sinh ra từ thuật toán. Chúng tôi cũng so sánh thuật toán đề xuất với phương pháp chiếu song song (PPA) (Anh .P.N., 2022), Thuật toán 3.1, Thuật toán 4.1.

3.2 Nguyên lý bài toán phụ quán tính song song

3.2.1 Thuật toán và định lý hội tụ

Giả sử các giả thiết sau được thỏa mãn

(A_1) Ánh xạ $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ là $\beta-$đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz với các hằng số dương c_1, c_2 thỏa mãn $\beta > c_1$.

(A_2) Với mọi $i \in I$, các ánh xạ $S_i : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ là β_i-nửa co và nửa đóng tại không (demicontractive and demiclosed at zero). Tập $\Omega := \cap_{i \in I} Fix(S_i)$ khác rỗng.

Bộ tham số điều khiển của được chọn thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} \tau \in (0, \beta - c_1), \{\lambda_k\} \subset [\bar{a}, \hat{a}] \subset (0,1), \lambda_k^2 + \frac{\tau - 4(\beta - c_1)}{2\tau^2(\beta - c_1)}\lambda_k + \frac{\beta - c_1 - \tau}{\tau^2(\beta - c_1)} \geq 0, \\ \zeta_k \in (0, \frac{1}{\tau \bar{a}}), \sum\limits_{k=1}^{\infty} \zeta_k = +\infty, \tau_k > 0, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \tau_k < +\infty, \\ \mu_k > 0, \gamma_{k,i} \in (\bar{b}, \hat{b}) \subset (0, 1 - \max\{\beta_i : i \in I\}), \quad \forall i \in I. \end{cases} \tag{3.4}$$

Khi đó, thuật toán nguyên lý bài toán phụ quán tính song song (PIAPA) gồm các bước tính toán:

Thuật toán 3.2. *Chọn các điểm khởi tạo* $x^0, x^1 \in \mathbb{H}$.

Bước 1. Cho trước dãy lặp x^{k-1}, x^k, *tính*

$$w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}), \tag{3.5}$$

với

$$\alpha_k = \begin{cases} \min\left\{\frac{\tau_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}, \mu_k\right\}, & \textit{khi} \quad \|x^k - x^{k-1}\| \neq 0, \\ \mu_k & \textit{ngược lại.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Bước 2. Lấy

$$u_i^k = (1 - \gamma_{k,i})w^k + \gamma_{k,i}S_i(w^k).$$

Đặt $t^k := u_{i_0}^k$,*với* $i_0 \in \text{argmax}\{\|u_i^k - w^k\| : i \in I\}$.

Step 3. Tính

$$y^k = argmin\left\{\lambda_k f(t^k, x) + \frac{1}{2}\|x - t^k\|^2 : x \in C\right\},$$
$$x^{k+1} = (1 - \zeta_k)t^k + \zeta_k y^k.$$

Cho $k := k + 1$, *quay trở lại Bước 1.*

Chú ý rằng, trong thuật toán trên, w^k được tính bằng kỹ thuật lặp quán tính, t^k được tính bằng kỹ thuật song song. Dãy điểm lặp x^{k+1} được tính toán dựa trên phương pháp lặp Mann và nguyên lý bài toán phụ. Cần nhắc lại rằng một điểm x^k sinh bởi Thuật toán 3.2 là một $\epsilon-$nghiệm của bài toán $EQ(\Omega, f)$ nếu $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$.

Để chứng minh sự hội tụ của dãy lặp sinh bởi Thuật toán 3.2, ta nhắc lại bổ đề sau:

Bổ đề 3.1. *Cho dãy số dương* $\{a_k\}$ *và dãy số thực* $\{p_k\}$. *Gọi* $\{\alpha_k\}$ *là dãy số thực trong đoạn* $(0, 1)$ *thỏa mãn* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$. *Giả sử*

$$a_{k+1} \leq (1 - \alpha_k)a_k + b_k, \quad k = 1, 2, \cdots .$$

Khi đó, nếu $\limsup\limits_{k\to\infty} \frac{b_k}{\alpha_k} \leq 0$ *hoặc* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$, *thì* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Ta có Định lý 3.2

Định lý 3.2. *Giả sử các giả thiết* (A_1), (A_2) *được thỏa mãn. Với điều kiện* (3.4), *dãy* $\{x^k\}$ *sinh bởi Thuật toán 3.2 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất* x^* *của bài toán* $EQ(\Omega, f)$.

3.2.2 Một số tính toán

Trong phần này, chúng tôi sẽ thực hiện một số tính toán số. Thuật toán (PIAPA) đề xuất sẽ được so sánh với Thuật toán chiếu song song (PPA) (CT1., Lược đồ 3.1) và Thuật toán kiểu dưới gradient (STA) của Iiduka H. (2003) (Thuật toán 3.2).

KẾT LUẬN

1. Kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi đã đề xuất một số phương pháp giải bài toán cân bằng hai cấp trên tập điểm bất động của các ánh xạ nửa co và đã đạt được một số kết quả chính sau đây:

(i) Đề xuất hai thuật toán mới giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Sự hội tụ mạnh của các thuật toán được chứng minh trong các Định lý 2.1 và 2.2. Kết quả này được công bố trong [CT1.], Danh mục công trình đã được công bố của tác giả.

(ii) Đề xuất một phương pháp chiếu mới để giải bài toán hai cấp trên giao của tập điểm bất động và nghiệm của bài toán cân bằng. Sự hội tụ của các dãy lặp sinh bởi thuật toán được chứng minh Định lý 2.3. Kết quả này được công bố trong [CT4.], Danh mục công trình đã được công bố của tác giả.

(iii) Đề xuất hai thuật toán giải bài toán cân bằng trên tập ràng buộc là giao của các tập điểm bất động của ánh xạ nửa co trong không gian Hilbert. Dưới giả thiết song hàm f là đơn điệu mạnh và liên tục kiểu Lipschitz trên $\mathbb{H}$, các dãy lặp sinh bởi hai thuật toán đều hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán đang xét. Kết quả này được công bố trong [CT2., CT3.], Danh mục công trình đã được công bố của tác giả.

(iv) Các tính toán số trong không gian vô hạn, hữu hạn chiều được thực hiện để minh họa cho các bước tính toán trong các thuật toán và sự hội tụ của các dãy lặp sinh bởi thuật toán. Mỗi thuật toán đề xuất đều được so sánh với một số thuật toán của các tác giả khác đã được công bố.

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh những kết quả đã đạt được trong luận án, chúng tôi có thể nghiên cứu theo các hướng tiếp theo như sau:

- Tiếp tục nghiên cứu thêm các thuật toán giải bài toán cân bằng hai cấp nói riêng và bài toán cân bằng tổng quát nói chung;
- Đánh giá sai số và tốc độ hội tụ của một số thuật toán được đề xuất trong luận án;
- Áp dụng các thuật toán đã được nghiên cứu cho các mô hình thực tiễn và tính toán độ phức tạp của thuật toán.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ

CT1. P.N. Anh, N.V. Hong, *New projection methods for equilibrium problems over fixed point sets*, Optimization Letters, 2021, **15** (2), 627-648.

CT2. P.N. Anh, J.K. Kim, N.D. Hien, N.V. Hong, *Strong convergence of inertial hybrid subgradient methods for solving equilibrium problems in Hilbert spaces*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2023, **24** (3), 499-514.

CT3. N.D. Hien, N.V. Hong, J.K. Kim, *Auxiliary problem principle extended to equilibrium problems over the intersection of fixed point sets*, accepted by Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2023.

CT4. P. N. Anh, N.V. Hong, Aviv Gibali, *Inexact simultaneous projection method for solving bilevel equilibrium problems*, Fixed Point Theory, 2023, **24** (2), 487-506.