

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC THĂNG LONG

Nguyễn Văn Hồng

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG  
TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC THĂNG LONG

Nguyễn Văn Hồng

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG  
TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 9 46 01 12

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

- PGS. TS. Phạm Ngọc Anh
- GS. TSKH. Lê Dũng Mưu

Hà Nội - 2024

# Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, dưới sự hướng dẫn của các thầy trong Tập thể hướng dẫn khoa học. Các kết quả, số liệu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trên bất kỳ công trình nào khác. Các dữ liệu tham khảo được trích dẫn đầy đủ.

Tác giả

Nguyễn Văn Hồng

# LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Thăng Long dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS. Phạm Ngọc Anh (Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông) và GS.TSKH. Lê Dũng Mưu (Đại học Thăng Long). Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới các thầy.

Trong quá trình nghiên cứu sinh và hoàn thành luận án, thông qua các bài giảng, hội nghị và seminar học thuật, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ, và các ý kiến đóng góp Quý báu của các thầy cô ở Viện Toán học và Ứng dụng (TIMAS) - Trường Đại học Thăng Long. Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu Trường Đại học Thăng Long, Phòng Sau đại học - Trường Đại học Thăng Long; Ban giám hiệu Trường Đại học Hải Phòng, Khoa Giáo dục Tiểu học và Mầm non thuộc Trường Đại học Hải Phòng, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt thời gian làm nghiên cứu sinh.

Xin chân thành cảm ơn các anh/chị/em trong nhóm nghiên cứu tại phòng Lab "Toán ứng dụng và Tính toán" của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông và các bạn bè đồng nghiệp đã luôn bên cạnh trao đổi, động viên và giúp đỡ tác giả trong thời gian dài học tập và nghiên cứu.

Kết quả nghiên cứu mới của luận án là món quà tinh thần, tác giả xin được gửi đến những người thân yêu trong gia đình mình. Những người đã luôn động viên, chia sẻ, giúp đỡ nghiên cứu sinh trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận án.

**Tác giả**

# DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide thực $n$ -chiều
$\mathbb{H}$	không gian Hilbert thực
$x^k \rightarrow x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới $x$
$x^k \rightharpoonup x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới $x$
$\ x\ $	chuẩn của vectơ $x$
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của hai vectơ $x$ và $y$
$I$	ánh xạ đồng nhất
$A \times B$	tích Đề-Các của hai tập hợp $A$ và $B$
$\rho(A, B)$	khoảng cách Hausdorff giữa hai tập hợp $A$ và $B$
$\operatorname{argmin}\{f(x) : x \in C\}$	tập các điểm cực tiểu của hàm $f$ trên $C$
$\partial f(x)$	dưới vi phân của $f$ tại $x$
$\partial_2 f(x, x)$	dưới vi phân theo biến thứ hai của hàm $f(x, \cdot)$ tại $x$
$\partial_2^\epsilon f(x, x)$	$\epsilon$ -dưới vi phân chéo theo biến thứ hai của hàm $f(x, \cdot)$ tại $x$
$\delta_C(\cdot)$	hàm chỉ trên $C$
$Pr_C(x)$	hình chiếu của $x$ lên tập $C$
$Pr_C^\epsilon(x)$	$\epsilon$ -chiếu của $x$ trên $C$
$N_C(x)$	nón pháp tuyến ngoài của $C$ tại $x$

$OP(\Omega, f)$	bài toán tối ưu
$EP(C, f)$	bài toán cân bằng được xác định bởi song hàm $f$ và tập $C$
$EP^d(C, f)$	bài toán cân bằng đối ngẫu của bài toán $EP(C, f)$
$BEP(C, f)$	bài toán cân bằng hai cấp được xác định bởi song hàm $f$ và tập $C$
$FEP(C, f)$	bài toán cân bằng trên tập điểm bất động xác định bởi song hàm $f$ và tập $C$
$VI(C, F)$	bài toán bất đẳng thức biến phân được xác định bởi tập $C$ và ánh xạ giá $F$
$Sol(C, F)$	tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đơn trị $VI(C, F)$
$MVI(C, F)$	bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị xác định bởi tập $C$ và ánh xạ đa trị $F$
$S_{(C,f)}$	tập nghiệm của bài toán cân bằng $EP(C, f)$
$S_{(C,f)}^d$	tập nghiệm của bài toán cân bằng đối ngẫu $EP^d(C, f)$
$Fix(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ $T$
$CPU - times$	thời gian thực hiện thuật toán
Start. point	điểm khởi tạo ban đầu
Test	Các bài toán thực nghiệm
$Iter.$	số bước lặp trong thuật toán

# Mục lục

Lời cam đoan	i
Lời cảm ơn	ii
Danh mục các ký hiệu và chữ viết tắt	iii
Mở đầu	1
<b>1 Chương 1. Một số kiến thức cơ bản về bài toán cân bằng và điểm bất động</b>	<b>10</b>
1.1 Không gian Hilbert . . . . .	10
1.2 Bài toán cân bằng . . . . .	19
1.2.1 Bài toán cân bằng và một số bài toán liên quan . .	19
1.2.2 Điều kiện tồn tại nghiệm . . . . .	22
1.3 Bài toán cân bằng trên tập điểm bất động . . . . .	23
1.3.1 Phát biểu bài toán . . . . .	23
1.3.2 Một số thuật toán thông dụng . . . . .	23
<b>2 Chương 2. Các phương pháp chiếu mở rộng</b>	<b>28</b>
2.1 Phương pháp chiếu song song xấp xỉ . . . . .	29
2.2 Phương pháp dưới đạo hàm song song . . . . .	36
2.3 Một số ví dụ minh họa và kết quả tính toán . . . . .	39
2.4 Phương pháp chiếu đạo hàm tăng cường song song . . . .	46
2.4.1 Thuật toán và định lý hội tụ . . . . .	47
2.4.2 Tính toán thực nghiệm . . . . .	56
<b>3 Chương 3. Phương pháp dưới đạo hàm quán tính</b>	<b>64</b>
3.1 Phương pháp dưới đạo hàm quán tính . . . . .	65

3.1.1	Thuật toán và định lý hội tụ . . . . .	65
3.1.2	Một số tính toán thực nghiệm . . . . .	72
3.2	Nguyên lý bài toán phụ quán tính song song . . . . .	78
3.2.1	Thuật toán và định lý hội tụ . . . . .	78
3.2.2	Một số tính toán . . . . .	82
	<b>Kết luận</b>	<b>87</b>
	<b>Hướng nghiên cứu tiếp theo</b>	<b>88</b>
	<b>Danh mục công trình khoa học đã công bố</b>	<b>89</b>
	<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>90</b>



# MỞ ĐẦU

## 1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Trải qua hơn nửa thế kỷ hình thành và phát triển, lý thuyết bài toán cân bằng đã dần khẳng định được vai trò cũng như sự phát triển của mình trong Lý thuyết tối ưu, Toán học ứng dụng và các mô hình thực tế.

Cho  $\mathbb{H}$  là một không gian Hilbert thực,  $C \subseteq \mathbb{H}$  là lồi, đóng, khác rỗng, và một song hàm  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sao cho  $f$  hữu hạn trên  $C$  và thỏa mãn  $f(x, x) = 0$  (điều kiện cân bằng). Bài toán cân bằng xét trong luận án có dạng:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in C. \quad (1)$$

Bài toán này được ký hiệu bởi  $EP(C, f)$  và tập nghiệm của nó là  $S_{(C, f)}$ .

Bài toán  $EP(C, f)$  đã được các tác giả Nikaido H. và Isoda K. trong [67] giới thiệu lần đầu tiên năm 1955 khi tổng quát hóa mô hình cân bằng Nash trong lý thuyết trò chơi không hợp tác. Trong [40], Fan K. gọi bài toán này là bất đẳng thức minimax và thiết lập sự tồn tại nghiệm của bài toán dưới điều kiện lồi, compact của tập  $C$  và tựa lồi của  $f(x, \cdot)$  với mọi  $x \in \mathbb{H}$ . Kết quả này của Fan K. được mở rộng bởi Brezis H. và đồng nghiệp trong [23]. Năm 1992, các tác giả Muu L.D. và Oettli W. [64] gọi bài toán này là bài toán cân bằng và đề xuất thuật toán hàm phạt tìm nghiệm của bài toán cân bằng khi song hàm  $f$  đơn điệu. Sau đó, năm 1994, các tác giả Blum E. và Oettli W. tiếp tục nghiên cứu về bài toán cân bằng trong [22]. Sau khi nghiên cứu của Blum E. và Oettli W. được công bố, bài toán cân bằng đã thu hút sự chú ý của rất nhiều các nhà nghiên cứu như Bigi G. [20], [21], Iiduka H. [46], Iusem A.N. [47], [50].

Về mặt hình thức, bài toán  $EP(C, f)$  có dạng khá đơn giản nhưng nó chứa đựng được nhiều lớp bài toán quan trọng thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau như: bài toán tối ưu, bài toán điểm yên ngựa, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng Nash. Từ kết quả của các bài toán riêng lẻ nói trên, với những điều chỉnh phù hợp ta có thể mở rộng cho bài toán cân bằng tổng quát. Điều này giải thích vì sao bài toán cân bằng mặc dù mới được chú ý gần đây nhưng đã có rất nhiều các nhà khoa học quan tâm nghiên cứu [21], [35], [50].

Bên cạnh bài toán cân bằng, một lớp bài toán khác được đề cập trong luận án này là bài toán điểm bất động. Lý thuyết điểm bất động đã ra đời khoảng một thế kỷ và phát triển mạnh mẽ trong những thập kỷ gần đây. Sự ra đời của định lý điểm bất động Brouwer (1912) và ánh xạ co Banach (1922) đã hình thành 2 hướng chính của lý thuyết điểm bất động: Sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ liên tục và sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ co. Lý thuyết điểm bất động có nhiều ứng dụng như: chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân và phương trình tích phân (định lý Picard và định lý Peano), chứng minh nguyên lý biến phân Ekeland, chứng minh sự tồn tại điểm cân bằng trong mô hình kinh tế, sự tồn tại nghiệm tối ưu của nhiều bài toán trong lý thuyết tối ưu... Nguyên lý ánh xạ co Banach (1922) là kết quả khởi đầu cho lý thuyết điểm bất động dạng co, nhưng phải đến những năm 60 của thế kỷ 20 mới được phát triển mạnh mẽ. Lý thuyết này cho phép ta xây dựng thuật toán tìm nghiệm của bài toán. Các nhà toán học đã mở rộng Nguyên lý ánh xạ co Banach theo hai hướng: Đưa ra các khái niệm mới, ánh xạ đa trị và mở rộng ánh xạ co đến ánh xạ không giãn. Các kết quả tiêu biểu có thể kể đến như: Cegielski A., Edelstein M., Boyd D., Meir A., Keeler E. cho ánh xạ đơn trị; Caristi C., Nadler S., Fan K, ... cho ánh xạ đa trị.

Trong những năm gần đây, nhiều nhà nghiên cứu đã quan tâm đến bài toán tìm nghiệm của bài toán cân bằng trên tập nghiệm của bài toán cân bằng khác hoặc tìm nghiệm của bài toán cân bằng trên tập điểm bất động chung của các ánh xạ.

Cho  $S_i : C \rightarrow C$  ( $i \in I \subseteq \mathbb{N}$ ) là  $\beta_i$ -nửa co. Bài toán cân bằng trên tập

điểm bất động, viết tắt FEP  $(\Omega, f)$ , được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in \Omega, \quad (2)$$

trong đó  $\Omega = \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i)$  và  $\text{Fix}(S_i) := \{x \in C : S_i(x) = x\}$ .

Các hướng nghiên cứu đang được chú trọng hiện nay đối với một lớp Bài toán (2) là: Nghiên cứu những vấn đề định tính như sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm, tính ổn định nghiệm [19, 20, 21, 53, 63], nghiên cứu định lượng như phương pháp giải, tính hội tụ của dãy lặp sinh bởi các thuật toán [20, 25, 47, 52, 59, 68, 69, 71], hướng nghiên cứu ứng dụng bài toán này vào trong thực tế, đặc biệt vào các mô hình kinh tế [10, 16, 50, 65, 66]. Trong việc nghiên cứu những vấn đề này, các phương pháp giải đóng một vai trò rất quan trọng. Đến nay đã có một số kết quả đạt được cho một số lớp bài toán cân bằng trên tập điểm bất động với các giả thiết đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz, trong đó chủ yếu sử dụng phương pháp điểm gần kề, phương pháp nguyên lý bài toán phụ, phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và phương pháp hàm khoảng cách. Các lí do chính dẫn đến việc nghiên cứu bài toán này trước hết là do phạm vi ứng dụng rộng rãi của bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động, dẫn đến nhiều vấn đề thực tế có thể mô tả dưới dạng bài toán này. Lí do thứ hai là bài toán cân bằng cũng như bài toán điểm bất động thường có nhiều nghiệm, do đó các bài toán này thuộc lớp các bài toán đặt không chính theo nghĩa những sai số nhỏ của dữ liệu có thể dẫn đến sự sai khác nhiều của lời giải. Bằng cách tiếp cận bài toán hai cấp FEP  $(\Omega, f)$  với những điều kiện thông thường như  $f$  đơn điệu mạnh, ví dụ  $f(x, y) = \|y - x\|^2$  và tập  $\Omega$  lồi đóng, các ánh xạ  $S_i$  có tính chất co suy rộng hoặc không giãn suy rộng, bài toán này luôn tồn tại và duy nhất nghiệm. Hơn nữa trong nhiều trường hợp ứng dụng, người ta muốn tìm một điểm bất động chung gần với một nghiệm đã được dự đoán hay một nghiệm mong muốn. Ngoài ra, một số vấn đề hạn chế với các thuật toán hiện nay để giải Bài toán (2):

- *Thứ nhất là*, các thuật toán đề xuất chưa thực sự được giải một cách hữu hiệu trên máy tính. Chẳng hạn như, tại mỗi bước lặp của thuật toán hiệu chỉnh, cần phải tìm một nghiệm chính xác của một bài toán cân bằng

phụ.

- *Thứ hai là*, một số thuật toán đã được đề xuất khi miền ràng buộc  $\Omega$  là tập điểm bất động của một ánh xạ. Tuy nhiên, miền ràng buộc là giao của một họ các tập điểm bất động của các ánh xạ giả co chặt vẫn là một hướng nghiên cứu mở.

- *Thứ ba là*, sự hội tụ của các thuật toán đề xuất vẫn đòi hỏi giả thiết khá chặt trên song hàm  $f$  như đơn điệu mạnh, hội tụ theo dãy,...

Nhận ra tầm quan trọng và sự cần thiết của việc nghiên cứu các thuật giải hữu hiệu trên máy tính, có ứng dụng trong các mô hình thực tiễn, luận án "Một số phương pháp giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động" đề xuất các thuật toán mới, ứng dụng tính toán trên phần mềm MATLAB với các số liệu cụ thể. Nối tiếp những kết quả nghiên cứu đã có trong nước và trên thế giới về các phương pháp giải bài toán cân bằng nói chung và phương pháp giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động nói riêng, bằng việc sử dụng các công cụ và các kỹ thuật trong tối ưu và giải tích, một mặt chúng tôi nghiên cứu đề xuất thuật toán mới, mặt khác nghiên cứu cải tiến các phương pháp đã có với các giả thiết đơn giản hơn trên song hàm của tập ràng buộc.

Nội dung của luận án được trình bày trong ba chương, các kết quả chính của luận án được viết ở các chương 2 và chương 3.

**Chương 1.** Một số kiến thức cơ bản về bài toán cân bằng và điểm bất động. Chương này cung cấp những vấn đề cơ bản nhất về bài toán cân bằng, bài toán cân bằng trên tập điểm bất động. Cụ thể, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cần thiết về giải tích hàm trong không gian Hilbert và giải tích lồi như khái niệm tập lồi, hàm lồi, ánh xạ co, ánh xạ không giãn, phép chiếu lên tập lồi đóng khác rỗng, phép chiếu xấp xỉ. Nhắc lại một số điều kiện cơ bản về sự tồn tại nghiệm và tính duy nhất nghiệm của bài toán cân bằng, bài toán cân bằng trên tập điểm bất động và một số phương pháp giải thông dụng.

**Chương 2.** Các phương pháp chiếu mở rộng. Nội dung của chương được viết dựa trên bài báo [CT1], [CT4] trong danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến Luận án. *Thứ nhất*, bằng cách phát triển phương

pháp dưới đạo hàm xấp xỉ của Santos P. [73] và kỹ thuật hướng giảm lai ghép của Yamada I. [83] chúng tôi đề xuất một phương pháp chiếu mới giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động. *Thứ hai*, chúng tôi kết hợp kỹ thuật song song với kỹ thuật lặp điểm cố định của Mann W.R. [58] để xây dựng lược đồ dưới đạo hàm song song. Sự mở rộng của thuật toán thứ nhất được trình bày trong thuật toán chiếu đạo hàm tăng cường song song ở cuối chương. Sự hội tụ mạnh của các thuật toán được chứng minh trong không gian Hilbert thực  $\mathbb{H}$ . Thuật toán được áp dụng vào việc tính toán trên một số ví dụ minh họa. Kết quả tính toán so sánh với các thuật toán khác cho thấy thuật toán được đề xuất ở đây hiệu quả với lớp mô hình nhất định.

**Chương 3.** Phương pháp dưới đạo hàm quán tính. Chương này trình bày hai thuật toán lặp mới giải bài toán FEP( $\Omega, f$ ) trên tập ràng buộc là giao của các tập điểm bất động của ánh xạ nửa co trong không gian Hilbert  $\mathbb{H}$ . Thuật toán thứ nhất là sự kết hợp của phương pháp hướng giảm lai ghép, kỹ thuật dưới đạo hàm với giả thiết song hàm  $f$  là đơn điệu mạnh và liên tục kiểu Lipschitz. Thuật toán thứ hai là sự kết hợp giữa kỹ thuật ngoại suy quán tính, phép chiếu song song và nguyên lý bài toán phụ giải bài toán cân bằng. Sự hội tụ mạnh của các dãy lặp sinh bởi thuật toán được chứng minh dưới các giả thiết tiêu chuẩn của song hàm  $f$  và bộ tham số điều chỉnh được lựa chọn phù hợp. Chương này được viết chủ yếu dựa trên hai bài báo [CT2], [CT3].

## 2. Mục tiêu nghiên cứu

Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu các vấn đề sau đây về bài toán cân bằng trên tập điểm bất động:

- (i) Nghiên cứu đề xuất thuật toán chiếu mới giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động;
- (ii) Nghiên cứu cải biên phương pháp dưới đạo hàm quán tính; nguyên lý bài toán phụ quán tính song song;

- (iii) Nghiên cứu đề xuất phương pháp chiếu xấp xỉ song song giải bài toán cân bằng trên giao của tập nghiệm một họ các bài toán điểm bất động và bài toán cân bằng;
- (iv) Tính toán ứng dụng với các ví dụ cụ thể trong không gian vô hạn, hữu hạn chiều, so sánh với một số thuật toán đã được công bố của các tác giả khác.

### 3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Với các mục tiêu đặt ra như trên, trong luận án này chúng tôi nghiên cứu các nội dung sau về bài toán cân bằng trên tập điểm bất động:

#### **Nội dung 1.**

Nghiên cứu đề xuất các thuật toán mới giải bài toán cân bằng trên giao của tập nghiệm một họ các bài toán điểm bất động;

#### **Nội dung 2.**

Nghiên cứu đề xuất thuật toán mới giải bài toán cân bằng trên giao của tập nghiệm một họ các bài toán điểm bất động và bài toán cân bằng;

#### **Nội dung 3.**

Nghiên cứu sự hội tụ mạnh của các thuật toán đề xuất trong không gian Hilbert  $\mathbb{H}$ .

### 4. Phương pháp nghiên cứu

Xuất phát từ mục tiêu nghiên cứu của luận án, các phương pháp nghiên cứu được sử dụng như sau:

- (i) Xây dựng và chứng minh sự hội tụ mạnh của các thuật toán đề xuất, chúng tôi sử dụng các kỹ thuật trong tối ưu để giải bài toán cân bằng như: phương pháp chiếu song song, phương pháp dưới đạo hàm song

song, phương pháp dưới đạo hàm lai hóa quán tính, lặp quán tính, kỹ thuật chiếu-lặp Halpern và một số kỹ thuật khác.

- (ii) Kết hợp một số phương pháp tối ưu thông dụng đã dùng cho bài toán tối ưu, bài toán bù, bài toán bất đẳng thức biến phân như phương pháp điểm gần kề, phương pháp dưới đạo hàm, phương pháp chiếu xấp xỉ và các phương pháp lặp điểm bất động.

## 5. Kết quả của luận án

Với các mục tiêu đặt ra như trên, luận án đã đạt được các kết quả sau:

- (i) Đề xuất hai thuật toán mới giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động trong không gian Hilbert thực  $\mathbb{H}$  với giả thiết song hàm  $f$  là đơn điệu mạnh và có tập dưới vi phân xấp xỉ là liên tục Lipschitz trên tập  $C$ . Thuật toán đầu xuất phát từ ý tưởng của phương pháp đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng và bài toán điểm bất động [5], kỹ thuật chiếu song song trong [9] của tác giả Anh P.N. và kỹ thuật chiếu dưới đạo hàm của Strodiot J.J., Hai T.N. [44, 78]. Thuật toán thứ hai là kết hợp kỹ thuật song song và kỹ thuật lặp điểm cố định của Mann W.R. [58] để xây dựng lược đồ dưới đạo hàm song song giải bài toán đang xét khi  $C = \mathbb{H}$ . Sự hội tụ mạnh của các thuật toán được chứng minh trong các Định lý 2.2 và 2.3; Kết quả này được công bố trong [CT1], [CT4] Danh mục công trình khoa đã công bố.
- (ii) Đề xuất hai thuật toán lặp mới giải bài toán cân bằng trên tập ràng buộc là giao của các tập điểm bất động của ánh xạ nửa co trong không gian Hilbert. Thuật toán đầu tiên sử dụng phương pháp hướng giảm lai ghép, phương pháp dưới đạo hàm giải bài toán cân bằng và kỹ thuật lặp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn. Thuật toán thứ hai dựa trên các kỹ thuật ngoại suy quán tính, chiếu song song và nguyên lý bài toán phụ để giải bài toán cân bằng. Sự hội tụ của các dãy lặp sinh bởi hai thuật toán dưới các giả thiết song hàm  $f$  là đơn

điều mạnh (giả đơn điệu mạnh) và liên tục kiểu Lipschitz trên  $\mathbb{H}$  được chứng minh trong các Định lý 3.1, 3.2. Kết quả này được công bố trong [CT2], [CT3] ở Danh mục công trình khoa đã công bố.

- (iii) Thực hiện các tính toán số trong không gian vô hạn, hữu hạn chiều để minh họa cho các bước tính toán trong các thuật toán và sự hội tụ của các dãy lặp sinh bởi thuật toán. So sánh thuật toán đề xuất với một số thuật toán của các tác giả khác đã được công bố. Các tính toán được thực hiện bởi "MATLAB R2016a running on a PC with Intel(R) Core(TM) i9-9900KS CPU @ 4.00GHz 32.0 GB Ram".

Các kết quả chính của luận án được viết dựa trên 04 bài báo, trong đó 01 bài xuất bản trên tạp chí SCI, 02 bài xuất bản trên tạp chí SCIE và 01 bài đã gửi đăng tại tạp chí SCIE. Các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Hội thảo: "Những hướng mới trong tối ưu tính toán và ứng dụng" (26/12 - 27/12, 2021) tại Viện nghiên cứu cao cấp về Toán.
- Hội nghị quốc tế "The International Symposium on Applied Science (ISAS 2022) (14/10 - 16/10, 2022)" tại Đại học Bách khoa thành phố Hồ Chí Minh.
- Hội thảo "Tối ưu và Tính toán Khoa học" lần thứ 21 (20/4 - 22/4, 2023) tại Ba Vì.
- Hội nghị "Toán học toàn quốc lần thứ X (VMC 2023) (8/8 - 12/8, 2023)" tại Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng.
- Seminar tại phòng Lab "Toán Ứng dụng và Tính toán" của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông.

## 6. Bố cục của luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án và danh mục tài liệu tham khảo, luận án gồm 3 chương:



Chương 1. Một số kiến thức cơ bản về bài toán cân bằng và điểm bất động

Chương 2. Các phương pháp chiếu mở rộng

Chương 3. Phương pháp dưới đạo hàm quán tính

## Chương 1

# Một số kiến thức cơ bản về bài toán cân bằng và điểm bất động

Chương này chứa các kiến thức bổ trợ cho các chương sau và được trình bày thành ba phần chính. Phần đầu tiên nhắc lại những khái niệm cần thiết về Giải tích hàm, Giải tích lồi có liên quan đến luận án. Phần thứ hai giới thiệu về bài toán cân bằng, các trường hợp riêng của nó cùng một số điều kiện về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng. Phần cuối của chương trình bày về bài toán cân bằng trên tập điểm bất động và một số phương pháp giải thông dụng. Nội dung chương được viết dựa trên các tài liệu [24, 53], [36] – [40] trong Danh mục tài liệu tham khảo.

### 1.1 Không gian Hilbert

Xét một không gian Hilbert thực  $\mathbb{H}$  với tích vô hướng  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  và chuẩn tương ứng được xác định bởi  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  với mọi  $u \in \mathbb{H}$ . Một dãy  $\{u^k\} \subset \mathbb{H}$  được gọi là *hội tụ mạnh* tới  $u^* \in \mathbb{H}$  nếu  $\|u^k - u^*\| \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow +\infty$ . Một dãy  $\{u^k\} \subset \mathbb{H}$  được gọi là *hội tụ yếu* tới  $u^* \in \mathbb{H}$  nếu  $\langle u, u^k - u^* \rangle \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow +\infty$ , với mọi  $u \in \mathbb{H}$ . Ta đã biết, một dãy hội tụ mạnh thì hội tụ yếu, nhưng điều ngược lại không đúng. Tuy nhiên, theo [17], nếu dãy  $\{u^k\}$  hội tụ yếu đến  $u^*$  và có  $\|u^k\|$  hội tụ tới  $\|u^*\|$  thì dãy  $\{u^k\}$  hội tụ mạnh đến  $u^*$ .

**Bổ đề 1.1.** [24, Lemma 2.1] Với mọi  $u, v \in \mathbb{H}, \alpha \in \mathbb{R}$ , ta có

- (i)  $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - \|v\|^2 - 2\langle u - v, v \rangle$ .
- (ii)  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$ .
- (iii)  $\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\langle v, u + v \rangle$ .
- (iv)  $\|\alpha u + (1 - \alpha)v\|^2 = \alpha\|u\|^2 + (1 - \alpha)\|v\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|u - v\|^2$ .

**Định nghĩa 1.1.** [76] Cho hai điểm  $a, b \in \mathbb{H}$ .

(i) Một đường thẳng đi qua  $a$  và  $b$  là tập hợp có dạng

$$\{x \in \mathbb{H} : x = \alpha a + \beta b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1\}.$$

(ii) Một đoạn thẳng nối hai điểm  $a, b$  là tập hợp có dạng

$$\{x \in \mathbb{H} : x = \alpha a + \beta b, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}.$$

**Định nghĩa 1.2.** [76] Cho  $C$  là một tập con của một không gian Hilbert thực  $\mathbb{H}$ . Khi đó, tập  $C$  được gọi là

(i) Tập affine nếu  $\forall x, y \in C, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

(ii) Tập lồi, nếu  $\forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0, 1]$ :

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

(iii) Tập đóng, nếu với mọi dãy  $\{x^k\} \subset C : \{x^k \rightarrow x\} \Rightarrow \{x \in C\}$ .

(iv) Tập đóng yếu, nếu với mọi dãy  $\{x^k\} \subset C : \{x^k \rightharpoonup x\} \Rightarrow \{x \in C\}$ .

(v) Tập compact, nếu với mọi dãy  $\{x^k\} \subset C$  đều có một dãy con hội tụ về một phần tử thuộc  $C$ .

(vi) Tập compact yếu, nếu với mọi dãy  $\{x^k\} \subset C$  đều có một dãy con hội tụ yếu về một phần tử thuộc  $C$ .

**Định nghĩa 1.3.** [76] Ta nói  $x$  là tổ hợp lồi của các vectơ  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , nếu

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \alpha_i \geq 0, (i = 1, \dots, k), \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$$

**Mệnh đề 1.1.** [2, Mệnh đề 1.1] Tập  $C$  là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của các điểm của nó. Tức là,  $C$  lồi khi và chỉ khi

$$\forall \alpha_i \geq 0, (i = 1, \dots, k), \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1, x_1, x_2, \dots, x_k \in C \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \in C.$$

**Định nghĩa 1.4.** [76] Cho vectơ  $0 \neq a \in \mathbb{H}$  và  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tập

$$\{x : \langle a, x \rangle \geq \alpha\}$$

được gọi là nửa không gian đóng và tập

$$\{x : \langle a, x \rangle > \alpha\}$$

gọi là nửa không gian mở.

**Định nghĩa 1.5.** [2] Giả sử  $C$  là tập con, lồi, đóng khác rỗng trong không gian  $\mathbb{H}$  và  $x^0 \in C$ . Khi đó tập

$$N_C(x^0) = \{\omega \in \mathbb{H} : \langle \omega, x - x^0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C\} \quad (1.1)$$

được gọi là *nón pháp tuyến ngoài* của  $C$  tại  $x^0$  và tập  $-N_C(x^0)$  được gọi là *nón pháp tuyến trong* của  $C$  tại  $x^0$ .

Tập

$$N_C^\epsilon(x^0) = \{\omega \in \mathbb{H} : \langle \omega, x - x^0 \rangle \leq \epsilon, \quad \forall x \in C\}$$

được gọi là *nón pháp tuyến xấp xỉ ngoài* của  $C$  tại  $x^0$ .

**Định nghĩa 1.6.** [19] Cho  $C$  là tập con, lồi, đóng khác rỗng trong không gian  $\mathbb{H}$ . Hàm  $f : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  được gọi là *hàm chính thường* trên  $C$ , nếu

$$\text{dom} f = \{x \in C : f(x) < +\infty\} \neq \emptyset, \quad \forall x \in C.$$

**Định nghĩa 1.7.** [76] Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathbb{H}$ . Hàm  $\phi : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  được gọi là

(i) *Lồi mạnh* trên  $C$  với hằng số  $\tau > 0$ , nếu

$$\phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha\phi(x) + (1 - \alpha)\phi(y) - \frac{1}{2}\alpha(1 - \alpha)\tau\|x - y\|^2, \\ \forall x, y \in C, \alpha \in [0, 1].$$

(ii) *Lồi chặt* trên  $C$ , nếu

$$\phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha\phi(x) + (1 - \alpha)\phi(y), \quad \forall x, y \in C, x \neq y, \alpha \in (0, 1).$$

(iii) *Lồi* trên  $C$ , nếu

$$\phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha\phi(x) + (1 - \alpha)\phi(y), \quad \forall x, y \in C, \alpha \in [0, 1].$$

(iv) *Tựa lồi* trên  $C$ , nếu

$$\phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{\phi(x), \phi(y)\}, \quad \forall x, y \in C, \alpha \in [0, 1].$$

Từ định nghĩa trên ta thấy  $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ .

**Định nghĩa 1.8.** [76] Vectơ  $w \in \mathbb{H}$  được gọi là *dưới đạo hàm* của hàm  $f$  tại  $x \in C$ , nếu

$$f(y) \geq \langle w, y - x \rangle + f(x), \quad \forall y \in C.$$

Tập tất cả các dưới đạo hàm của hàm  $f$  tại  $x$  được gọi là *dưới vi phân* của  $f$  tại  $x$ , ký hiệu là  $\partial f(x)$ . Hàm  $f$  được gọi là *khả dưới vi phân* tại  $x$  nếu  $\partial f(x) \neq \emptyset$ ; khả dưới vi phân trên  $C \subseteq \mathbb{H}$  nếu  $\partial f(x) \neq \emptyset$  với mọi  $x \in C$ .

**Ví dụ 1.1.** Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong  $\mathbb{H}$ . Xét hàm chỉ trên  $C$

$$\delta_C(x^0) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x^0 \in C, \\ +\infty & \text{khi } x^0 \notin C. \end{cases}$$

Khi đó,

$$\partial \delta_C(x^0) = N_C(x^0), \quad \forall x^0 \in C.$$

Dưới vi phân là một khái niệm mở rộng của đạo hàm trong trường hợp hàm không khả vi. Trong trường hợp  $\partial f(x^0)$  chỉ gồm duy nhất một điểm thì  $f$  khả vi tại  $x^0$ .

**Định nghĩa 1.9.** [2] Cho  $\epsilon > 0$ . Một vectơ  $w \in \mathbb{H}$  được gọi là một  $\epsilon$ - dưới đạo hàm của  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  tại  $x^0 \in C$ , nếu

$$\langle w, x - x^0 \rangle \leq f(x) - f(x^0) + \epsilon, \quad \forall x \in C.$$

Tập hợp tất cả các  $\epsilon$ - dưới đạo hàm của hàm  $f$  tại  $x^0 \in C$  được gọi là  $\epsilon$ - dưới vi phân của hàm  $f$  tại  $x^0$ , kí hiệu là

$$\partial^\epsilon f(x^0) := \{w \in \mathbb{H} : \langle w, x - x^0 \rangle \leq f(x) - f(x^0) + \epsilon, \quad \forall x \in C\}.$$

**Định nghĩa 1.10.** [2] Cho  $C \subseteq \mathbb{H}$  là lồi, đóng, khác rỗng,  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  là lồi và  $\epsilon \geq 0$ . Xét bài toán:

$$\min_{x \in C} f(x). \quad (1.2)$$

Một điểm  $x^* \in C$  được gọi là  $\epsilon$ -nghiệm của bài toán (1.2) nếu:

$$f(x^*) \leq f(x) + \epsilon, \quad \forall x \in C.$$

**Định nghĩa 1.11.** [76] Hàm số  $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  được gọi là

(i) *Nửa liên tục dưới tại  $\bar{x}$* , nếu

$$\forall \{x^k\} \subset \mathbb{H} : x^k \rightarrow \bar{x} \Rightarrow \liminf_{k \rightarrow +\infty} g(x^k) \geq g(\bar{x}),$$

nửa liên tục dưới trên  $\mathbb{H}$  nếu nó nửa liên tục dưới tại mọi  $\bar{x}$  trong  $\mathbb{H}$ .

(ii) *Nửa liên tục trên tại  $\bar{x}$* , nếu

$$\forall \{x^k\} \subset \mathbb{H} : x^k \rightarrow \bar{x} \Rightarrow \limsup_{k \rightarrow +\infty} g(x^k) \leq g(\bar{x}),$$

nửa liên tục trên trên  $\mathbb{H}$  nếu nó nửa liên tục trên tại mọi  $\bar{x}$  trong  $\mathbb{H}$ .

(iii) *Liên tục tại  $\bar{x}$* , nếu nó vừa nửa liên tục dưới vừa nửa liên tục trên tại  $\bar{x}$ , liên tục trên  $\mathbb{H}$  nếu nó liên tục tại mọi  $\bar{x}$  trong  $\mathbb{H}$ .

(iv) *Liên tục yếu theo dãy* nếu

$$\forall \{x^k\} \subset \mathbb{H} : x^k \rightarrow \bar{x} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} g(x^k) = g(\bar{x}).$$

**Định nghĩa 1.12.** [18] Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathbb{H}$ . Ánh xạ  $T : C \rightarrow \mathbb{H}$  được gọi là

(i) *Đơn điệu mạnh trên  $C$*  với hằng số  $\tau > 0$ , nếu

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq \tau \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C.$$

(ii) *Đơn điệu chặt trên  $C$* , nếu

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle > 0, \quad \forall x, y \in C, x \neq y.$$

(iii) *Đơn điệu trên  $C$* , nếu

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C.$$

(iv) *Giả đơn điệu* trên  $C$ , nếu

$$\langle T(y), x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle T(x), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C.$$

(vii) *Tựa đơn điệu* trên  $C$ , nếu

$$\langle T(y), x - y \rangle > 0 \Rightarrow \langle T(x), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C.$$

**Định nghĩa 1.13.** [1] Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathbb{H}$ . Một ánh xạ  $S : C \rightarrow C$  được gọi là:

(i) *Nửa co* với hằng số  $d$ , viết tắt  $d$ -nửa co, nếu  $Fix(S) \neq \emptyset$  và tồn tại  $d \in [0, 1)$  sao cho

$$\|S(x) - x^*\|^2 \leq \|x - x^*\|^2 + d\|x - S(x)\|^2, \quad \forall x \in C, x^* \in Fix(S).$$

(ii) *Tựa không giãn*, nếu  $Fix(S) \neq \emptyset$  và

$$\|S(x) - x^*\| \leq \|x - x^*\|, \quad \forall x \in C, x^* \in Fix(S).$$

(iii) *Nửa đóng tại 0*, nếu với mỗi  $\{x^k\} \subset C$ , thì

$$\{x^k \rightarrow \hat{x}, \|S(x^k) - x^k\| \rightarrow 0\} \Rightarrow \{S(\hat{x}) = \hat{x}\}.$$

**Định nghĩa 1.14.** [1] Cho  $C$  là một tập con khác rỗng của  $\mathbb{H}$ . Ánh xạ  $F : C \rightarrow \mathbb{H}$  được gọi là *giả co chặt* nếu tồn tại hằng số  $L > 0$  sao cho:

$$\|F(x) - F(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 + L\|(I - F)x - (I - F)y\|^2, \quad \forall x, y \in C,$$

trong đó  $I$  là ánh xạ đồng nhất. Khi  $L = 0$ ,  $F$  được gọi là ánh xạ *không giãn* trên  $C$ . Như vậy, lớp ánh xạ giả co chặt chứa lớp các ánh xạ không giãn.

Ánh xạ  $F$  được gọi là *tựa giả co chặt* nếu tồn tại  $L \in [0, 1)$  sao cho

$$\|F(x) - p\|^2 \leq \|x - p\|^2 + L\|x - F(x)\|^2, \quad \forall x \in C, p \in Fix(F).$$

**Ví dụ 1.2.** Cho tập  $C = [-9, 3]$  và ánh xạ  $F : C \rightarrow C$  được định nghĩa như sau:

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in [-9, 0), \\ -3x & \text{nếu } x \in [0, 3]. \end{cases}$$

Ta thấy, với mọi  $x, y \in [-9, 0)$

$$\|F(x) - F(y)\|^2 = |x - y|^2,$$

$$\|(I - F)x - (I - F)y\|^2 = |(x - x) - (y - y)|^2 = 0,$$

$$\|F(x) - F(y)\|^2 \leq |x - y|^2 + \frac{1}{2}\|(I - F)x - (I - F)y\|^2.$$

Với mọi  $x, y \in [0, 3]$  ta có

$$\|F(x) - F(y)\|^2 = 9|x - y|^2,$$

$$\|(I - F)x - (I - F)y\|^2 = |(x + 3x) - (y + 3y)|^2 = 16|x - y|^2,$$

$$\|F(x) - F(y)\|^2 = |x - y|^2 + \frac{1}{2}\|(I - F)x - (I - F)y\|^2.$$

Với mọi  $x \in [-9, 0)$  và  $y \in [0, 3]$ , ta có

$$\|F(x) - F(y)\|^2 = |x + 3y|^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$$

$$\|(I - F)x - (I - F)y\|^2 = |(x - x) - (y + 3y)|^2 = 16y^2.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} |x - y|^2 + \frac{1}{2}\|(I - F)x - (I - F)y\|^2 &= x^2 - 2xy + 9y^2 \\ &= x^2 + 6xy + 9y^2 - 8xy \\ &= (x + 3y)^2 - 8xy \\ &= |F(x) - F(y)|^2 - 8xy \\ &\geq |F(x) - F(y)|^2, \end{aligned}$$

do đó,

$$\|F(x) - F(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \frac{1}{2}\|(I - F)x - (I - F)y\|^2.$$

Vậy  $F$  là ánh xạ  $\frac{1}{2}$ -giả co chặt. Tuy nhiên,  $F$  không phải là ánh xạ không giãn trên  $C$  vì với  $x = 1 \in C, y = 0 \in C$ , ta có:  $\|F(x) - F(y)\|^2 = 9\|x - y\|^2 = 9 > 1 = \|x - y\|^2$ .

**Định nghĩa 1.15.** Cho dãy ánh xạ  $\{S_i\}$  sao cho  $Fix(S_i) \neq \emptyset, \forall i \in I = \{1, 2, \dots\}$ . Khi đó,  $\{S_i\}$  được gọi là thỏa mãn điều kiện  $(Z)$  nếu mọi dãy  $\{x^i\}$  bất kỳ, bị chặn trong  $\mathbb{H}$  mà

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|x^i - S_i x^i\| = 0,$$

thì mọi điểm tụ yếu của dãy  $\{x^i\}$  nằm trong  $\Omega = \bigcap_{i \in I} Fix(S_i)$ .



**Định nghĩa 1.16.** Cho  $T : \mathbb{H} \rightarrow 2^{\mathbb{H}}$  là một ánh xạ đa trị.  $T$  được gọi là

(i)  $\epsilon$ -liên tục Lipschitz trên  $C$  với hằng số  $L > 0$  nếu

$$\rho(T(x), T(y)) \leq L\|x - y\| + \epsilon, \quad \forall x, y \in C,$$

ở đây,  $\rho$  là khoảng cách Hausdorff giữa 2 tập  $T(x)$  và  $T(y)$ . Ta nhắc lại khái niệm khoảng cách Hausdorff của hai tập  $A, B$  được xác định bởi:

$$\rho(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\},$$

$$\text{với } d(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \quad d(B, A) := \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|.$$

Nếu  $L \in (0, 1)$ , ánh xạ  $T$  được gọi là  $\epsilon$ -co với hằng số  $L$  trên  $C$ .

(ii)  $\beta$ -đơn điệu mạnh trên  $C$  nếu

$$\langle w_x - w_y, x - y \rangle \geq \beta\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C, \quad w_x \in T(x), \quad w_y \in T(y).$$

**Định nghĩa 1.17.** [20] Cho  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  là song hàm cân bằng, tức là  $f(x, x) = 0$  với mọi  $x \in C$ . Khi đó,  $\epsilon$ -dưới vi phân chéo  $\partial_2^\epsilon f(x, x)$  tại  $x \in C$  được xác định bởi

$$\begin{aligned} \partial_2^\epsilon f(x, x) &= \{w \in \mathbb{H} : f(x, y) - f(x, x) \geq \langle w, y - x \rangle - \epsilon, \quad \forall y \in C\} \\ &= \{w \in \mathbb{H} : f(x, y) + \epsilon \geq \langle w, y - x \rangle, \quad \forall y \in C\}; \end{aligned}$$

**Định nghĩa 1.18.** [20, 53] Cho  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  là song hàm cân bằng, tức là  $f(x, x) = 0$  với mọi  $x \in C$ . Khi đó,  $f$  được gọi là:

(i)  $\beta$ -đơn điệu mạnh trên  $C$  với hằng số  $\beta > 0$ , viết tắt là ( $\beta$ -đơn điệu mạnh), nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\beta\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C.$$

(ii)  $\beta$ -đơn điệu chặt trên  $C$ , nếu

$$f(x, y) + f(y, x) < 0, \quad \forall x, y \in C.$$

(iii)  $\beta$ -đơn điệu trên  $C$ , nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0, \quad \forall x, y \in C.$$

(iv) *Giả đơn điệu* trên  $C$ , nếu

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0, \quad \forall x, y \in C.$$

(v) *Thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz* trên  $C$ , nếu tồn tại các hằng số dương  $c_1, c_2$  sao cho

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1\|x - y\|^2 - c_2\|y - z\|^2 \quad \forall x, y \in C.$$

**Phép chiếu lên một tập lồi đóng** [18] Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathbb{H}$ . Với mỗi phần tử  $x \in \mathbb{H}$ , phép chiếu của  $x$  trên  $C$ , là một điểm thuộc  $C$  và gần điểm  $x$  nhất, được xác định dưới dạng

$$Pr_C(x) = \operatorname{argmin} \{ \|y - x\|^2 : y \in C \}.$$

Khi đó,

$$\|x - Pr_C(x)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x \in \mathbb{H}, \forall y \in C.$$

$\bar{x} = Pr_C(x)$  khi và chỉ khi  $\bar{x} \in C$  thỏa mãn

$$\langle x - \bar{x}, \bar{x} - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

Với  $\epsilon > 0$ ,  $w_x \in C$  được gọi là  $\epsilon$ -*phép chiếu* của  $x \in \mathbb{H}$  trên  $C$ , nếu

$$\langle x - w_x, w_x - y \rangle \geq -\frac{\epsilon^2}{4}, \quad \forall y \in C. \quad (1.3)$$

Tập tất cả các  $\epsilon$ -phép chiếu của  $x$  trên  $C$  ký hiệu là  $Pr_C^\epsilon(x)$ .

Từ định nghĩa trên, dễ dàng thấy  $Pr_C^\epsilon(x)$  là một  $\epsilon$ -phép chiếu trên  $C$  với mọi  $\epsilon > 0$ , tựa không gian trên  $\mathbb{H}$  và

$$\|w_x - w_y\| \leq \|x - y\| + \epsilon, \quad \forall x, y \in \mathbb{H}, w_x \in Pr_C^\epsilon(x), w_y \in Pr_C^\epsilon(y).$$

**Chú ý 1.1.** Với mỗi  $x, y \in \mathbb{H}$ , các khẳng định sau là đúng

$$\|w_x - w_y\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \epsilon^2, \quad \forall w_x \in Pr_C^\epsilon(x), w_y \in Pr_C^\epsilon(y). \quad (1.4)$$

Thật vậy, trong (1.3), thay thế  $y$  bởi  $w_y \in Pr_C^\epsilon(y) \subset C$  ta có

$$\langle x - w_x, w_x - w_y \rangle \geq -\frac{\epsilon^2}{4}.$$

Tương tự, ta có

$$\langle y - w_y, w_y - w_x \rangle \geq -\frac{\epsilon^2}{4}.$$

Cộng về về các bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\langle y - w_y - x + w_x, w_y - w_x \rangle \geq -\frac{\epsilon^2}{2}.$$

Điều này nghĩa là

$$\begin{aligned} \|w_x - w_y\|^2 &\leq \langle w_x - w_y, x - y \rangle + \frac{\epsilon^2}{2} \\ &\leq \|w_x - w_y\| \|x - y\| + \frac{\epsilon^2}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|w_x - w_y\|^2 + \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + \frac{\epsilon^2}{2}. \end{aligned}$$

Như vậy, (1.4) đúng.

**Mệnh đề 1.2.** [18, Proposition 4.8] Xét  $C$  là một tập lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathbb{H}$ . Khi đó,

- (i)  $\forall x \in \mathbb{H}$ ,  $Pr_C(x)$  luôn tồn tại và duy nhất.
- (ii)  $\langle x - Pr_C(x), y - Pr_C(x) \rangle \leq 0$ ,  $\forall y \in C, x \in \mathbb{H}$ .
- (iii)  $\|Pr_C(x) - Pr_C(y)\|^2 \leq \langle Pr_C(x) - Pr_C(y), x - y \rangle$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{H}$ .
- (iv)  $\|Pr_C(x) - Pr_C(y)\| \leq \|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{H}$ .
- (v)  $\|x - Pr_C(x)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|y - Pr_C(x)\|^2$ ,  $\forall x \in \mathbb{H}, y \in C$ .

## 1.2 Bài toán cân bằng

### 1.2.1 Bài toán cân bằng và một số bài toán liên quan

Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathbb{H}$ . Song hàm  $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  thỏa mãn  $f(x, y) < +\infty$  với mọi  $x, y \in C$ . Giả thiết  $f(x, x) = 0$ ,  $\forall x \in C$  thường được gọi là điều kiện *cân bằng*. Khi đó, bài toán cân bằng được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

Bài toán này được ký hiệu bởi  $EP(C, f)$  và tập nghiệm của nó là  $S_{(C, f)}$ .

**Bài toán cân bằng đối ngẫu  $EP^d(C, f)$ :**

Bài toán cân bằng  $EP(C, f)$  có mối quan hệ chặt chẽ với bài toán đối ngẫu

(hay là bài toán cân bằng Minty) của nó, ký hiệu  $EP^d(C, f)$ .

Bài toán đối ngẫu của bài toán cân bằng được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(y, x^*) \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

Ký hiệu tập nghiệm của bài toán  $EP^d(C, f)$  là  $S_{(C, f)}^d$ .

**Bài toán tối ưu OP(C, h):**

Cho  $h : C \rightarrow \mathbb{R}$ . Tìm  $x^* \in C$  trên sao cho

$$h(x^*) \leq h(x), \quad \forall x \in C.$$

Đặt

$$f(x, y) = \begin{cases} h(y) - h(x) & \text{nếu } x, y \in C, \\ +\infty & \text{nếu } x \notin C \text{ hoặc } y \notin C. \end{cases}$$

Khi đó, bài toán OP(C, h) được viết dưới dạng bài toán EP(C, f).

**Bài toán bất đẳng thức biến phân VI(C, F):**

Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathbb{H}$ ,  $F : C \rightarrow \mathbb{H}$ . Bài toán VI(C, F) được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Đặt

$$f(x, y) = \begin{cases} \langle F(x), y - x \rangle & \text{nếu } x, y \in C, \\ -1 & \text{nếu } x \notin C \text{ hoặc } y \notin C. \end{cases}$$

khi đó, bài toán VI(C, F) và bài toán EP(C, f) là tương đương nhau.

**Bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị MVI(C, F):** Cho ánh xạ đa trị  $F : C \rightarrow 2^{\mathbb{H}}$  có tập giá trị lồi, compact, khác rỗng. Bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị, viết tắt MVI(C, F), được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C, u^* \in F(x^*) \text{ sao cho } \langle u^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Dùng giả thiết tập  $F(x)$  compact, ta đặt

$$f(x, y) = \begin{cases} \max_{u \in F(x)} \langle u, y - x \rangle & \text{nếu } x, y \in C, \\ -1 & \text{nếu } x \notin C \text{ hoặc } y \notin C. \end{cases}$$

Khi đó, nếu  $(x^*, u^*)$  là nghiệm của bài toán  $\text{MVI}(C, F)$  thì

$$f(x^*, y) = \max_{u \in F(x^*)} \langle u, y - x^* \rangle \geq \langle u^*, y - x^* \rangle, \quad \forall y \in C,$$

$x^*$  là nghiệm của bài toán  $\text{EP}(C, f)$ . Ngược lại, nếu  $x^*$  là nghiệm của bài toán  $\text{EP}(C, f)$ , thì

$$\langle u^*, y - x^* \rangle = \max_{u \in F(x^*)} \langle u, y - x^* \rangle = f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

Vậy,  $(x^*, u^*)$  là nghiệm của bài toán  $\text{MVI}(C, F)$ .

### **Bài toán điểm bất động Brouwer $\text{FP}(C, F)$ :**

Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathbb{H}$ ,  $F : C \rightarrow C$ . Bài toán điểm bất động  $\text{FP}(C, F)$  được phát biểu như sau: Tìm  $x^* \in C$  sao cho

$$x^* = F(x^*).$$

Với mọi  $x, y \in C$ , xác định song hàm  $f$  bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} \langle x - F(x), y - x \rangle & \text{nếu } x, y \in C, \\ -1 & \text{nếu } x \notin C \text{ hoặc } y \notin C. \end{cases}$$

Khi đó, bài toán tìm điểm bất động  $\text{FP}(C, F)$  được viết dưới dạng bài toán cân bằng  $\text{EP}(C, f)$ .

Để hiểu rõ hơn về lịch sử của bài toán cân bằng, chúng tôi xin đưa ra mô hình bài toán cân bằng thị trường Nash. Mô hình bài toán cân bằng Nash là một trong các mô hình kinh tế cơ bản, thu hút được sự quan tâm của rất nhiều nhà nghiên cứu. Mô hình được phát biểu như sau:

Giả sử có  $N$  hãng cùng tham gia sản xuất một loại hàng hóa, tập chiến lược của mỗi hãng là  $C_i \subset \mathbb{R}^+$ . Khi đó, tập chiến lược của mô hình là  $C = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_N$ . Gọi  $f_i$  là hàm lợi nhuận của hãng thứ  $i$  trên  $C$ ,  $x_i \in C_i$  là mức sản lượng của hãng  $i$ . Rõ ràng, mỗi hãng đều muốn tìm kiếm tối đa lợi nhuận của mình thông qua việc lựa chọn mức sản lượng phù hợp, với giả thiết sản lượng của các hãng khác là các tham số đầu vào.

Một cách tiếp cận thường được sử dụng cho mô hình này dựa trên khái niệm cân bằng Nash nổi tiếng. Ta cần nhắc lại rằng điểm chiến lược  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)^\top \in C$  được gọi là điểm cân bằng của mô hình Nash

nếu

$$f_i(x^*) \geq f_i(x^*[y_i]), \quad \forall x_i^* \in C_i, i \in \{1, 2, \dots, N\},$$

với  $x^*[y_i]$  được xác định từ  $x^*$  khi thay  $x_i^*$  bởi  $y_i \in C_i$ . Dạng tường minh của điều kiện này như sau:

$$f_i(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_N^*) \geq f_i(x_1^*, \dots, y_i, \dots, x_N^*), \quad \forall y_i \in C_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Bài toán cân bằng Nash này được đưa về bài toán cân bằng thông qua hàm Nikaido-Isoda

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \sum_{i=1}^N f_i(x) - f_i(x[y_i]) \\ &= \sum_{i=1}^N f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) - f_i(x_1, \dots, y_i, \dots, x_N). \end{aligned}$$

### 1.2.2 Điều kiện tồn tại nghiệm

Gọi  $C$  là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực  $\mathbb{H}$ . Giả sử rằng:

- (G1)  $f(\cdot, y)$  nửa liên tục trên yếu với mọi  $y \in C$ .
- (G2)  $f(x, \cdot)$  lồi, nửa liên tục trên yếu với mọi  $x \in C$ .
- (G3) Tồn tại một tập  $X \subset \mathbb{H}$  compact yếu và  $y^0 \in X \cap C$  sao cho  $f(x, y^0) < 0$ ,  $\forall x \in C \setminus X$ .

Ta có định lý Ky Fan về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng.

**Định lý 1.1.** [40, Theorem 3.1] Cho  $C$  là tập con lồi, compact, khác rỗng của một không gian Hilbert thực  $\mathbb{H}$ . Giả sử  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  là song hàm cân bằng thỏa các điều kiện

- (i)  $f(\cdot, y)$  nửa liên tục trên trên  $C$ .
- (ii)  $f(x, \cdot)$  tựa lồi trên  $C$ .

Khi đó, bài toán cân bằng  $EP(C, f)$  có nghiệm.

**Định lý 1.2.** [19, Propositions 3.1, 3.2, 4.1] Cho  $C \subset \mathbb{H}$  là tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathbb{H}$  và  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn tính chất  $f(x, x) = 0$  với mọi  $x \in C$ . Khi đó, các khẳng định sau đúng:

- (i) Với giả thiết (G2), tập nghiệm  $S_{(C,f)}$  là tập lồi đóng.
- (ii) Dưới các giả thiết (G1), (G2),  $S_{(C,f)}^d \subset S_{(C,f)}$ . Hơn nữa, nếu  $f$  giả đơn điệu trên  $C$  thì  $S_{(C,f)}^d = S_{(C,f)}$ .
- (iii) Dưới các giả thiết (G1), (G2), (G3), tập  $S_{(C,f)} \neq \emptyset$ . Nếu thêm giả thiết  $f$  giả đơn điệu trên  $C$  thì tập  $S_{(C,f)}$  là tập lồi, compact.

**Hệ quả 1.1.** [1, Theorem 2.3] Cho  $C \subset \mathbb{H}$  là tập lồi, đóng, khác rỗng và  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  là song hàm cân bằng. Khi đó,

- (i) bài toán cân bằng  $EP(C, f)$  có nhiều nhất một nghiệm, nếu  $f$  đơn điệu chặt trên  $C$ .
- (ii) bài toán  $EP(C, f)$  luôn có duy nhất nghiệm nếu  $f$  đơn điệu mạnh trên  $C$  và thỏa các giả thiết (G1), (G2).

### 1.3 Bài toán cân bằng trên tập điểm bất động

#### 1.3.1 Phát biểu bài toán

Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert  $\mathbb{H}$ , các ánh xạ  $S_i : C \rightarrow C$  ( $i \in I := \{1, 2, \dots, p\}$ ) là ánh xạ  $\beta_i$ -nửa co, song hàm  $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ . Gọi  $\Omega$  là giao của tập các điểm bất động của ánh xạ  $S_i$ ,

$$\Omega = \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i), \text{Fix}(S_i) := \{x \in C : S_i(x) = x\}.$$

Bài toán cân bằng trên tập điểm bất động được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in \Omega.$$

#### 1.3.2 Một số thuật toán thông dụng

Một số thuật toán thông dụng hiện nay được đưa ra để giải một lớp các bài toán cân bằng trên tập điểm bất động, chẳng hạn như thuật toán

nguyên lý bài toán phụ được đề xuất bởi Anh P.N. và Ansari Q.H. [11], thuật toán co quán tính của Anh P.N. [7], thuật toán tách của Duc P.M. và Muu L.D. [38], thuật toán ánh xạ co của Hai T.N. [42], [43], Hai T.N., Thuy L.Q., [45] và một số thuật toán khác [56, 82].

Dựa trên ý tưởng của phương pháp hướng giảm lai ghép của Yamada I. và Ogura N. [83], lược đồ lặp của Iusem A.N. và Sosa W. [47], Iiduka H. and Yamada I. [46] đề xuất thuật toán kiểu dưới đạo hàm để giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động  $Fix(T)$  của một ánh xạ không giãn  $T$  trong không gian  $\mathbb{R}^n$  sau:

$$\text{Tìm } u \in Fix(T) \text{ sao cho } f(u, y) \geq 0, \quad \forall y \in Fix(T).$$

ở đây,  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathbb{R}^n$  và song hàm  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x, x) = 0$ ,  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  là ánh xạ không giãn. Dãy lặp  $\{x^k\}$  của thuật toán kiểu dưới đạo hàm được xác định bởi:

$$\begin{cases} y^k \in K_k := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \rho_k + 1\} \text{ sao cho} \\ f(y^k, x^k) \geq 0 \text{ và } \max\{f(y, x^k) : y \in K_k\} \leq f(y_k, x_k) + \epsilon_k, \\ \xi^k \in \partial f(y^k, \cdot)(x^k), x^{k+1} = T(x^k - \lambda_k f(y^k, x^k)\xi^k), \rho_{k+1} = \max\{\rho_k, \|x_{k+1}\|\}. \end{cases}$$

Sự hội tụ của thuật toán này được phát biểu trong định lý:

**Định lý 1.3.** [46, Theorem 3.4] Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathbb{R}^n$ ,  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  là ánh xạ không giãn có  $Fix(T) \neq \emptyset$ , dãy  $\{\xi^k\}$  bị chặn, tức là tồn tại  $M > 0$  sao cho  $\|\xi^k\| \leq M$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $\lambda_k > 0$  với mọi  $k = 0, 1, \dots$ ,  $f(x, \cdot)$  lồi,  $f(\cdot, x)$  liên tục với mỗi  $x \in \mathbb{R}^n$ . Khi đó, các khẳng định dưới đây đúng:

i. Nếu  $\Omega_k = \{u \in Fix(T) : f(y^k, u) \leq 0\} \neq \emptyset$ , thì

$$\|x^{k+1} - u^k\|^2 \leq \|x^k - u^k\|^2 + \lambda_k(M^2\lambda_k - 2)f(y^k, x^k)^2.$$

Đặc biệt,

$$\|x^{k+1} - u^k\|^2 \leq \|x^k - u^k\|^2, \quad \forall \lambda_k \in \left[0, \frac{2}{M^2}\right].$$



ii. Giả sử  $\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} \text{Fix}(\Omega_k) \neq \emptyset$ ,  $\lambda_k \in [a, b] \subset (0, \frac{2}{M^2})$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $a, b > 0$ ).  
 Khi đó, dãy  $\{x^k\}, \{y^k\}$  bị chặn, hơn nữa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(y^k, x^k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - Tx^k\| = 0.$$

iii. Với  $\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} \text{Fix}(\Omega_k) \neq \emptyset$ ,  $\lambda_k \in [a, b] \subset (0, \frac{2}{M^2})$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $a, b > 0$ ),  
 $\epsilon_k \geq 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$ . Khi đó, dãy  $\{x^k\}$  hội tụ tới một nghiệm của bài toán đang xét.

Rất gần đây, năm 2021, Anh P.N. và Ansari Q.H. đã đề xuất thuật toán nguyên lý bài toán phụ giải bài toán cân bằng xác định trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị sau:

Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathbb{H}$ , ánh xạ đa trị  $F : C \rightarrow 2^{\mathbb{H}}$  có tập giá trị khác rỗng, hàm  $g : C \rightarrow \mathbb{R}$  lồi. Ký hiệu  $\Omega = S(C, F, g)$  là tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị hỗn hợp: Tìm  $y^* \in C$  và  $w^* \in F(y^*)$  sao cho  $\langle w^*, y - y^* \rangle + g(y) - g(y^*) \geq 0$ ,  $\forall y \in C$ . Rõ ràng, bài toán này được viết dưới dạng bài toán cân bằng trên tập giao của tập các điểm bất động và tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị

$$\bigcap_{i=1}^r \text{Fix}(S_i) \cap \Omega.$$

Thuật toán đề xuất có dạng:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^0 \in C, \\ y^k = \text{prox}_{\lambda^k g}(x^k - \lambda^k u^k), \quad u^k \in F(x^k), \\ w^k = x^k - \gamma^k \rho^k d^k, \quad d^k = x^k - y^k - \lambda^k(u^k - v^k), \\ v^k \in F(y^k) \cap \bar{B}(u^k, \mathcal{K}\|x^k - y^k\|), \\ \rho^k = \begin{cases} \frac{1}{\|d^k\|^2} \langle x^k - y^k, d^k \rangle & \text{nếu } d^k \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } d^k = 0. \end{cases} \\ z^k = \text{argmin} \{ \beta^k f(w^k, t) + \frac{1}{2} \|t - w^k\|^2 : t \in C \}, \\ u_j^k = (1 - \beta^{k,j}) z^k + \beta^{k,j} S_j(z^k), \\ x^{k+1} = u_{j_k}^k, \quad j_k \in \text{argmax} \{ \|u_j^k - z^k\| : j \in I = 1, 2, \dots \}. \end{array} \right.$$

Điều kiện trên các tham số:

$$\begin{cases} \mathcal{K} > 0, \tau > 0, \mathcal{K} \geq L, 0 < \tau < \eta \leq \xi, \\ 0 < \lambda^k < \frac{1}{\mathcal{K}}, \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k = \lambda > 0, 0 < a < \gamma^k < \bar{a} < 2, \\ \beta^{k,i} \in (b, \bar{b}) \subset (0, 1 - \beta_i), \bar{\beta} = \max\{\beta_i : i \in I\}, \forall i \in I, \\ \beta^k \searrow 0, \sum_{i=0}^{\infty} \beta^k = +\infty, 2\beta^k \eta - (\beta^k)^2 \xi^2 < 1, \\ 0 < \beta^k < \min \left\{ \frac{1}{\tau}, \frac{2\eta - 2\tau}{\xi^2 - \tau^2} \right\}. \end{cases}$$

Giả thiết trên song hàm  $f$  và ánh xạ giá đa trị  $F$ :

- (i) Tập nghiệm của bài toán đang xét là khác rỗng.
- (ii)  $F$  giả đơn điệu, liên tục Lipschitz với hằng số  $L$ .
- (iii)  $g$  là hàm lồi, nửa liên tục dưới.
- (iv)  $f$  đơn điệu mạnh với hằng số  $\eta$  và liên tục kiểu Lipschitz với hằng số  $\xi \geq \eta$ .
- (v)  $f$  nửa liên tục địa phương yếu, tức là, nếu  $x^k$  hội tụ yếu đến  $\hat{x}$ , và  $y^k$  hội tụ yếu đến  $\hat{y}$ , khi đó  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k, y^k) = f(\hat{x}, \hat{y})$ .
- (vi) Với các dãy  $x^k, y^k$  bất kỳ trong tập  $C$  mà  $x^k \rightarrow x, y^k \rightarrow y$  thì  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|f(x^k, y^k)\|}{\|x^k - y^k\|} < +\infty$ .
- (vii) Với mỗi  $i \in I = \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $S_i : C \rightarrow C$  là các ánh xạ  $\beta_i$ - nửa co.

Dưới các điều kiện trên các tham số, các giả thiết của  $f$  và  $F$ , các dãy  $\{x^k\}$  và  $\{y^k\}$  hội tụ mạnh tới một nghiệm của bài toán trong một không gian Hilbert thực  $\mathbb{H}$ .

## Kết luận Chương 1

Trong Chương 1, chúng tôi đã nhắc lại một số kiến thức cơ bản có liên quan đến luận án trong Giải tích hàm và Giải tích lồi, thường được sử dụng trong bài toán cân bằng  $EP(f, C)$ , điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng. Bài toán cân bằng trên tập điểm bất động và một số

thuật toán lập thông dụng giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động được đề cập ở cuối chương.

## Chương 2

# Các phương pháp chiếu mở rộng

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số phương pháp chiếu để giải bài toán cân bằng (2.1) trên tập điểm bất động trong không gian Hilbert thực  $\mathbb{H}$  với giả thiết song hàm  $f$  là đơn điệu mạnh và có tập dưới vi phân xấp xỉ là liên tục Lipschitz theo kiểu Hausdorff trên tập  $C$ . Thuật toán đầu là sự kết hợp kỹ thuật dưới đạo hàm xấp xỉ của Santos P. [73] và lược đồ hướng giảm lai ghép của Yamada I. [83]. Ở Thuật toán thứ hai, chúng tôi kết hợp kỹ thuật lặp điểm bất động của Mann W.R. [58] và phương pháp dưới đạo hàm song song để giải bài toán (2.1).

Xuất phát từ ý tưởng của phương pháp đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng và phép lặp Mann giải bài toán điểm bất động [5], với kỹ thuật chiếu song song [14] của Anh P.N. và Strodiot J.J., Hai T.N. [44, 78], trong mục 2.4, chúng tôi đề xuất một thuật toán chiếu mới giải bài toán (2.21). Các tính toán minh họa của thuật toán và kết quả so sánh với các thuật toán khác cũng được trình bày chi tiết ở các mục 2.3 và 2.4.3. Nội dung của chương này được viết dựa trên hai bài báo [CT1, CT4] trong Danh mục công trình khoa học đã được công bố.

Bài toán cân bằng trên tập điểm bất động được phát biểu dưới dạng:

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in \Omega, \quad (2.1)$$

ở đây,  $S_i : C \rightarrow C$  ( $i \in I := \{1, 2, \dots, p\}$ ) là ánh xạ  $\beta_i$ -nửa co,  $\Omega = \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i)$  và  $\text{Fix}(S_i) := \{x \in C : S_i(x) = x\}$ .

## 2.1 Phương pháp chiếu song song xấp xỉ

**Thuật toán 2.1. Khởi tạo:** Chọn một điểm bất kỳ  $x^0 \in C$ .

**Bước lặp:**  $k = 1, 2, \dots$

*Bước 1. Lấy các tham số thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{cases} \tau \in (0, \beta), 0 < \tau_k \leq \gamma_k < \min \left\{ \frac{2\beta}{L^2}, \frac{2(\beta-\tau)}{L^2-\tau^2}, \frac{1}{\tau} \right\}, \\ 0 < a \leq \alpha_{k,i} < \min \left\{ \frac{1-\beta_i}{2} : i \in I \right\}, \\ \epsilon_k \leq \gamma_k, \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 < +\infty, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau_k < +\infty. \end{cases} \quad (2.2)$$

*Bước 2. Tính*

$$\begin{cases} y_i^k = (1 - \alpha_{k,i})x^k + \alpha_{k,i}S_i(x^k), \quad \forall i \in I, \\ y^k := y_{i_0}^k, \quad \text{với } i_0 \in \operatorname{argmax}\{\|y_i^k - x^k\| : i \in I\}, \\ x^{k+1} \in \operatorname{Pr}_C^{\epsilon_k}(y^k - \gamma_k u^k), \quad u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(y^k, y^k). \end{cases} \quad (2.3)$$

*Bước 3. Đặt  $k := k + 1$  và quay lại Bước 1.*

**Bổ đề 2.1.** Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực  $\mathbb{H}$ ,  $g : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  là một song hàm cân bằng,  $g(x, x) = 0$  với mọi  $x \in C$ . Với mỗi  $x \in C$ ,  $g(x, y)$  nửa liên tục dưới, lồi, khả dưới vi phân theo  $y$  trên  $C$ . Cho  $\epsilon \geq 0$ ,  $g$  là  $\beta$ -đơn điệu mạnh trên  $C$  và  $\partial_2^\epsilon g(x, x)$  là compact, liên tục Lipschitz với hằng số  $L > 0$  trên  $C$  sao cho  $\beta \leq L$ . Khi đó, ánh xạ đa trị

$$S(x) := \{x - \gamma w_x : w_x \in \partial_2^\epsilon g(x, x), x \in C\}, \quad \forall x \in C,$$

là  $2\sqrt{\gamma\epsilon}$ -co với hằng số  $\delta = \sqrt{1 - \gamma(2\beta - \gamma L^2)}$  dưới điều kiện  $\gamma \in \left(0, \frac{2\beta}{L^2}\right)$ .

*Chứng minh.* Theo định nghĩa dưới đạo hàm, ta có

$$\begin{aligned} g(x, y) &\geq \langle w_x, y - x \rangle - \epsilon, \quad \forall w_x \in \partial_2^\epsilon g(x, x), \\ g(y, x) &\geq \langle w_y, x - y \rangle - \epsilon, \quad \forall w_y \in \partial_2^\epsilon g(y, y). \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên và sử dụng giả thiết  $g$  là  $\beta$ -đơn điệu mạnh, với mọi  $x, y \in C$ ,  $w_x \in \partial_2^\epsilon g(x, x)$ ,  $w_y \in \partial_2^\epsilon g(y, y)$ , ta có

$$-\beta\|x - y\|^2 \geq g(x, y) + g(y, x) \geq \langle w_x - w_y, y - x \rangle - 2\epsilon. \quad (2.4)$$

Lấy  $\bar{w}_x \in \partial_2^\epsilon g(x, x)$  và  $\bar{w}_y \in \partial_2^\epsilon g(y, y)$  sao cho

$$\rho(\partial_2^\epsilon g(x, x), \partial_2^\epsilon g(y, y)) = \|\bar{w}_x - \bar{w}_y\|.$$

Đặt  $A = \partial_2^\epsilon g(x, x)$  và  $B = \partial_2^\epsilon g(y, y)$ . Kết hợp (2.4), tính đơn điệu mạnh của  $g$  và tính liên tục Lipschitz của  $\partial_2^\epsilon g(x, x)$ , ta có

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \sup_{w_x \in A} \inf_{w_y \in B} \|x - \tau w_x - (y - \tau w_y)\|^2, \right. \\ & \quad \left. \sup_{w_y \in B} \inf_{w_x \in A} \|x - \tau w_x - (y - \tau w_y)\|^2 \right\} \\ &= \|x - y\|^2 + \max \left\{ \sup_{w_x \in A} \inf_{w_y \in B} [2\tau \langle w_x - w_y, y - x \rangle + \tau^2 \|w_x - w_y\|^2], \right. \\ & \quad \left. \sup_{w_y \in B} \inf_{w_x \in A} [2\tau \langle w_x - w_y, y - x \rangle + \tau^2 \|w_x - w_y\|^2] \right\} \\ &\leq \|x - y\|^2 + \max \left\{ \sup_{w_x \in A} \inf_{w_y \in B} [2\tau(-\beta \|x - y\|^2 + 2\epsilon) + \tau^2 \|w_x - w_y\|^2], \right. \\ & \quad \left. \sup_{w_y \in B} \inf_{w_x \in A} [2\tau(-\beta \|x - y\|^2 + 2\epsilon) + \tau^2 \|w_x - w_y\|^2] \right\} \\ &\leq \|x - y\|^2 + 2\tau(-\beta \|x - y\|^2 + 2\epsilon) + \max \left\{ \sup_{w_x \in A} \inf_{w_y \in B} \tau^2 \|w_x - w_y\|^2, \right. \\ & \quad \left. \sup_{w_y \in B} \inf_{w_x \in A} \tau^2 \|w_x - w_y\|^2 \right\} \\ &= \|x - y\|^2 + 2\tau(-\beta \|x - y\|^2 + 2\epsilon) + \tau^2 \rho(A, B)^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 - 2\tau(\beta \|x - y\|^2 - 2\epsilon) + \tau^2 L^2 \|x - y\|^2 \\ &= [1 - \tau(2\beta - \tau L^2)] \|x - y\|^2 + 4\tau\epsilon, \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} \rho(S(x), S(y))^2 &= \max \left\{ \sup_{w_x \in A} \inf_{w_y \in B} \|x - \tau w_x - (y - \tau w_y)\|^2, \right. \\ & \quad \left. \sup_{w_y \in B} \inf_{w_x \in A} \|x - \tau w_x - (y - \tau w_y)\|^2 \right\} \\ &= [1 - \tau(2\beta - \tau L^2)] \|x - y\|^2 + 4\tau\epsilon. \end{aligned}$$

Từ (2.4), suy ra

$$\begin{aligned} -\beta \|x - y\|^2 &\geq -\|\bar{w}_x - \bar{w}_y\| \|x - y\| - 2\epsilon \\ &= -\rho(\partial_2^\epsilon g(x, x), \partial_2^\epsilon g(y, y)) \|x - y\| - 2\epsilon \\ &\geq -L \|x - y\|^2 - 2\epsilon. \end{aligned}$$

Khi đó, ta có  $(\beta - L)\|x - y\|^2 \leq 2\epsilon$  với mọi  $x, y \in C$ . Luôn có  $0 < \beta \leq L$ . Khi đó,  $1 - \tau(2\beta - \tau L^2) > 0$ . Tức là,

$$\rho(S(x), S(y)) \leq \sqrt{1 - \tau(2\beta - \tau L^2)}\|x - y\| + 2\sqrt{\tau\epsilon}.$$

Do đó,  $S$  là  $2\sqrt{\tau\epsilon}$ -co với hằng số  $\delta = \sqrt{1 - \tau(2\beta - \tau L^2)} \in (0, 1)$  trên  $C$ .  $\square$

Tiếp theo, để chứng minh sự hội tụ của dãy  $\{x^k\}$  trong (2.3) chúng tôi nhắc lại một số bổ đề cơ bản sau.

**Bổ đề 2.2.** ([16, Lemma 2.3]) Cho  $\{a_k\}$  và  $\{\delta_k\}$  là các dãy số không âm thỏa mãn

$$a_{k+1} \leq a_k + \delta_k, \quad \forall k \geq 0,$$

với  $\{\delta_k\}$  với  $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < +\infty$ . Khi đó, tồn tại giới hạn  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k < +\infty$ .

**Bổ đề 2.3.** ([54, Remark 4.4]) Cho  $\{a_k\}$  là dãy số không âm. Giả sử rằng với mỗi số nguyên  $m$ , tồn tại một số nguyên  $p$  sao cho  $p \geq m$  và  $a_p \leq a_{p+1}$ . Cho  $k_0$  là một số nguyên sao cho  $a_{k_0} \leq a_{k_0+1}$  và xác định, với mọi số nguyên  $k \geq k_0$ ,

$$\tau(k) = \max\{i \in \mathbb{N} : k_0 \leq i \leq k, a_i \leq a_{i+1}\}.$$

Khi đó,  $0 \leq a_k \leq a_{\tau(k)+1}$  với mọi  $k \geq k_0$ . Hơn nữa, dãy  $\{\tau(k)\}_{k \geq k_0}$  là không giảm và dần tới  $+\infty$  khi  $k \rightarrow \infty$ .

**Bổ đề 2.4.** ([54, Remark 4.2]) Giả sử rằng  $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  là một ánh xạ  $m$ -nửa co sao cho  $\text{Fix}(S) \neq \emptyset$  và  $\alpha \in [0, 1 - m]$ . Khi đó, ánh xạ  $S_\alpha = (1 - \alpha)I + \alpha S$  là tựa không giãn trên  $\mathbb{H}$ . Hơn nữa,

$$\|S_\alpha(x) - x^*\|^2 \leq \|x - x^*\|^2 - \alpha(1 - m - \alpha)\|S(x) - x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{H}, x^* \in \text{Fix}(S).$$

**Bổ đề 2.5.** ([80, Lemma 2.5]) Cho  $\{a_k\} \subset \mathbb{R}_+$  là dãy số thỏa mãn bất đẳng thức

$$a_{k+1} \leq (1 - \alpha_k)a_k + \alpha_k\delta_k$$

với  $\{\alpha_k\} \subset [0, 1]$  và  $\{\delta_k\} \subset \mathbb{R}$ . Nếu  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = +\infty$  và  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \delta_k \leq 0$ , thì  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

Sự hội tụ của phương pháp chiếu song song được khẳng định thông qua định lý sau.

**Định lý 2.1.** Cho  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  là  $\beta$  đơn điệu mạnh, liên tục yếu,  $\epsilon \geq 0$ ,  $x \in C$ ,  $\partial_2^\epsilon f(x, x)$  compact, liên tục Lipschitz với hằng số  $L > 0$  trên  $C$ . Với mỗi  $i \in I$ , ánh xạ  $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  là  $\beta_i$ -nửa co sao cho tập  $\Omega \neq \emptyset$ . Khi đó, dãy  $\{x^k\}$ ,  $\{y^k\}$  sinh ra bởi thuật toán hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất  $x^*$  của bài toán (2.1).

*Chứng minh.* Cho  $x^*$  là nghiệm duy nhất của bài toán (2.1). Ta chứng minh định lý theo các bước:

**Bước 1.** Ta có khẳng định sau:

$$a_{k+1} \leq (1 - \tau\gamma_k)a_k + \frac{\gamma_k(3 + \|w_k^*\|)^2}{\tau} - \alpha_{k,i_0}(1 - \alpha_{k,i_0} - \beta_{i_0})(1 - \tau\gamma_k)\|x^k - S_{i_0}(x^k)\|^2,$$

với  $a_k = \|x^k - x^*\|^2$ ,  $w_k^* \in \partial_2^{\tau k} f(x^*, x^*)$  sao cho

$$x^* - \gamma_k w_k^* = Pr_{x^* - \gamma_k \partial_2^{\tau k} f(x^*, x^*)}(y^k - \gamma_k u^k).$$

Hơn thế nữa,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - y^k\| = 0$ , hai dãy  $\{x^k\}$  và  $\{y^k\}$  bị chặn.

Thật vậy, đặt  $A_k(x) = x - \gamma_k \partial_2^{\tau k} f(x, x)$  với mọi  $x \in C$ . Chú ý rằng  $\partial_2^{\tau k} f(x, x) \neq \emptyset$  vì  $f(x, \cdot)$  khả dưới vi phân với mọi  $x \in C$ . Từ điều kiện (2.2), dẫn đến

$$\beta - \tau > 0, L^2 - \tau^2 > 0, \gamma_k < \frac{2(\beta - \tau)}{L^2 - \tau^2},$$

nên  $\sqrt{1 - \gamma_k(2\beta - \gamma_k L^2)} < 1 - \tau\gamma_k$ . Sử dụng Bổ đề 2.1, Chú ý 1.1, ta xác định được

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| &\leq \|(y^k - \gamma_k u^k) - x^*\| + \epsilon_k \\ &\leq \|(y^k - \gamma_k u^k) - (x^* - \gamma_k w_k^*)\| + \gamma_k \|w_k^*\| + \epsilon_k \\ &\leq \rho(A_k(y^k), A_k(x^*)) + \gamma_k \|w_k^*\| + \epsilon_k \\ &\leq \rho_k \|y^k - x^*\| + 2\sqrt{\gamma_k \tau_k} + \gamma_k \|w_k^*\| + \epsilon_k \\ &\leq (1 - \tau\gamma_k)\|y^k - x^*\| + \gamma_k(2 + \|w_k^*\|) + \epsilon_k \\ &\leq (1 - \tau\gamma_k)\|y^k - x^*\| + \gamma_k(3 + \|w_k^*\|), \end{aligned}$$

với  $x^* \in Pr_C^{\epsilon_k}(x^*)$ ,  $\rho_k = \sqrt{1 - \gamma_k(2\beta - \gamma_k L^2)}$ . Điều này chứng tỏ

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq [(1 - \tau\gamma_k)\|y^k - x^*\| + \gamma_k(3 + \|w_k^*\|)]^2$$



$$\begin{aligned}
&= \left[ (1 - \tau\gamma_k) \|y^k - x^*\| + \tau\gamma_k \frac{3 + \|w_k^*\|}{\tau} \right]^2 \\
&\leq (1 - \tau\gamma_k) \|y^k - x^*\|^2 + \frac{\gamma_k (3 + \|w_k^*\|)^2}{\tau}. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Với mỗi  $\alpha \in [0, 1)$ , đặt  $S_\alpha = (1 - \alpha)I + \alpha S_{i_0}$ . Áp dụng bất đẳng thức (2.4), ta có

$$\begin{aligned}
\|y^k - x^*\|^2 &= \|y_{i_0}^k - x^*\|^2 \\
&= \|S_{\alpha_k}(x^k) - x^*\|^2 \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 - \alpha_{k,i_0}(1 - \alpha_{k,i_0} - \beta_{i_0}) \|x^k - S_{i_0}(x^k)\|^2. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.5), (2.6), ta thu được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq (1 - \tau\gamma_k) \|x^k - x^*\|^2 + \frac{\gamma_k (3 + \|w_k^*\|)^2}{\tau} \\
&\quad - \alpha_{k,i_0}(1 - \alpha_{k,i_0} - \beta_{i_0})(1 - \tau\gamma_k) \|x^k - S_{i_0}(x^k)\|^2 \\
&\leq (1 - \tau\gamma_k) \|x^k - x^*\|^2 + \tau\gamma_k \frac{(3 + \|w_k^*\|)^2}{\tau^2} \\
&\leq \max\{\|x^k - x^*\|^2, K\} \\
&\leq \dots \\
&\leq \max\{\|x^0 - x^*\|^2, K\},
\end{aligned}$$

trong đó

$$K = \frac{1}{\tau^2} \sup_k \{(3 + \|w_k^*\|)^2\} < +\infty.$$

Do vậy, dãy  $\{x^k\}$  bị chặn. Từ (2.6), ta thấy  $\{y^k\}$  cũng bị chặn. Sử dụng tính chất của  $y^k \in Pr_C^{\epsilon_k}(y^k)$  suy ra

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - y^k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} [\gamma_k \|u^k\| + \epsilon_k] = 0.$$

Như vậy ta đã chứng minh được khẳng định ở Bước 1.

**Bước 2.** Ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 2.1.* Tồn tại  $k_0 \in \mathbb{N}$  sao cho  $a_{k+1} \leq a_k$  với mọi  $k \geq k_0$ , do đó  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A < +\infty$ . Từ **Bước 1**,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^*\|^2 = A$ . Qua (2.6), ta có

$$\frac{a(1 - \beta_{i_0})}{2} \|y_i^k - x^k\|^2 \leq \alpha_{k,i_0}(1 - \beta_{i_0} - \alpha_{k,i_0}) \|x^k - S_{i_0}(x^k)\|^2$$

$$\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^*\|^2.$$

Như vậy,

$$0 \leq a \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_i(x^k) - x^k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_i^k - x^k\| = 0, \quad \forall i \in I. \quad (2.7)$$

Ở **Bước 1**, ta đã chỉ ra  $\{y^k\}$  là dãy bị chặn, tức là ta có thể giả thiết  $y^{k_j} \rightarrow \bar{x} \in C$  và từ tính liên tục yếu của hàm  $f$  ta có

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(y^k, x^*)] = \lim_{j \rightarrow \infty} [-f(y^{k_j}, x^*)] = -f(\bar{x}, x^*).$$

Do vậy,  $x^{k_j} \rightarrow \bar{x}$ ,  $y_i^{k_j} \rightarrow \bar{x}$  khi  $j \rightarrow \infty$  với mọi  $i \in I$ . Áp dụng tính chất nửa đóng tại không của  $S_i$  với mọi  $i \in I$ ,  $x^{k_j} \rightarrow \bar{x} \in C$  và (2.7), ta chỉ ra  $\bar{x} \in \Omega$  và  $\liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(y^k, x^*)] = -f(\bar{x}, x^*) \geq 0$ . Giả thiết  $u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(y^k, y^k)$ ,  $f(y^k, y^k) = 0$ , dẫn đến

$$f(y^k, x^*) = f(y^k, x^*) - f(y^k, y^k) \geq \langle u^k, x^* - y^k \rangle - \tau_k. \quad (2.8)$$

Kết hợp (2.6), (2.8) và (1.4),  $x^{k+1} \in Pr_C^{\epsilon_k}(y^k - \gamma_k u^k)$ ,  $x^* \in Pr_C^{\epsilon_k}(x^*)$ , ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|y^k - \gamma_k u^k - x^*\|^2 + \epsilon_k^2 \\ &= \|y^k - x^*\|^2 - 2\gamma_k \langle u^k, y^k - x^* \rangle + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\ &\leq \|y^k - x^*\|^2 + 2\gamma_k [f(y^k, x^*) + \tau_k] + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\gamma_k [f(y^k, x^*) + \tau_k] + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Điều này có nghĩa là

$$2 \sum_{i=k_0}^k \gamma_i [-f(y^i, x^*)] \leq \|x^{k_0} - x^*\|^2 + 2 \sum_{i=k_0}^k \gamma_i \tau_i + M \sum_{i=k_0}^k \gamma_i^2 + \sum_{i=k_0}^k \epsilon_i^2, \quad \forall k \geq k_0, \quad (2.10)$$

với  $M = \sup\{\|u^k\|^2 : k \in \mathbb{N}\} < +\infty$ . Dưới các giả thiết (2.2) và  $\liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(y^k, x^*)] \geq 0$ , ta có thể kết luận  $\liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(y^k, x^*)] = 0$ . Mặt khác, tính chất  $f$  là  $\beta$ - đơn điệu mạnh  $f$  đưa đến

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x^*, \bar{x}) \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^*, y^k) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} [-\beta \|y^k - x^*\|^2 - f(y^k, x^*)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\beta A - \liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(y^k, x^*)] \\
&= -\beta A.
\end{aligned}$$

Do đó  $A = 0$ , tức là  $x^k \rightarrow x^*, y^k \rightarrow x^*$  khi  $k \rightarrow \infty$ .

*Trường hợp 2.2.* Không tồn tại  $k_1 \in \mathbb{N}$  sao cho  $a_{k+1} \leq a_k$  với mọi  $k \geq k_1$ . Khi đó tồn tại  $k_0$  là số nguyên dương sao cho  $a_{k_0} \leq a_{k_0+1}$ . Áp dụng Bổ đề 2.3, Maingé đã chỉ ra dãy con  $\{a_{\xi(k)}\}$  của dãy  $\{a_k\}$  được xác định như sau

$$\xi(k) = \max\{i \in \mathbb{N} : k_0 \leq i \leq k, a_i \leq a_{i+1}\}.$$

Maingé cũng chỉ ra rằng

$$\xi(k) \nearrow +\infty, 0 \leq a_k \leq a_{\xi(k)+1}, a_{\xi(k)} \leq a_{\xi(k)+1}, \quad \forall k \geq k_0. \quad (2.11)$$

Do dãy  $\{y^k\}$  bị chặn (chứng minh ở **Bước 1**), không mất tổng quát, ta giả sử rằng dãy  $y^{\xi(k)} \rightarrow \bar{x} \in C$ . Tương tự như trường hợp 1, ta cũng suy ra  $\bar{x} \in \Omega$  và  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^*, y^{\xi(k)}) = f(x^*, \bar{x}) \geq 0$ . Sử dụng (2.9) và tính chất  $\beta$ -đơn điệu mạnh của  $f$ , tức là,  $f(y^k, x^*) \leq -f(x^*, y^k) - \beta \|y^k - x^*\|^2$ , ta có

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\leq a_k + 2\gamma_k [f(y^k, x^*) + \tau_k] + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\
&\leq a_k + 2\gamma_k [-f(x^*, y^k) - \beta \|y^k - x^*\|^2 + \tau_k] + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2.
\end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned}
2\gamma_{\xi(k)} f(x^*, y^{\xi(k)}) &\leq a_{\xi(k)} - a_{\xi(k)+1} - 2\gamma_{\xi(k)} \beta \|y^{\xi(k)} - x^*\|^2 + 2\tau_{\xi(k)} \gamma_{\xi(k)} \\
&\quad + \gamma_{\xi(k)}^2 \|u^{\xi(k)}\|^2 + \epsilon_{\xi(k)}^2 \\
&\leq -2\gamma_{\xi(k)} \beta \|y^{\xi(k)} - x^*\|^2 + 2\tau_{\xi(k)} \gamma_{\xi(k)} + \gamma_{\xi(k)}^2 \|u^{\xi(k)}\|^2 + \epsilon_{\xi(k)}^2.
\end{aligned}$$

Do  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau_k < +\infty$  và dãy  $\{u^k\}$  bị chặn (chứng minh trong **Bước 1**), ta thu được

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^*, y^{\xi(k)}) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^*, y^{\xi(k)}) = 0. \quad (2.12)$$

Từ (2.6), Chú ý 1.1 và  $f$  là  $\beta$ -đơn điệu mạnh, dẫn đến

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= \|x^{k+1} - x^*\|^2 \\
&\leq \|y^k - \gamma_k u^k - x^*\|^2 + \epsilon_k^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|y^k - x^*\|^2 + 2\gamma_k \langle u^k, x^* - y^k \rangle + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\
&\leq \|y^k - x^*\|^2 + 2\gamma_k f(y^k, x^*) + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\
&\leq \|y^k - x^*\|^2 + 2\gamma_k [-f(x^*, y^k) - \beta \|y^k - x^*\|^2] + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\
&= (1 - 2\beta\gamma_k) \|y^k - x^*\|^2 - 2\gamma_k f(x^*, y^k) + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\
&\leq (1 - 2\beta\gamma_k) a_k - 2\gamma_k f(x^*, y^k) + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2.
\end{aligned}$$

Tức là

$$a_{\xi(k)+1} \leq [1 - 2\beta\gamma_{\xi(k)}] a_{\xi(k)} - 2\gamma_{\xi(k)} f(x^*, y^{\xi(k)}) + \gamma_{\xi(k)}^2 \|u^{\xi(k)}\|^2 + \epsilon_{\xi(k)}^2.$$

Khi đó, áp dụng Bổ đề 2.5 ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\xi(k)} = 0$  và do đó  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\xi(k)+1} = 0$ . Kết hợp điều này và (2.11), ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . Suy ra, các dãy  $\{x^k\}$  và  $\{y^k\}$  hội tụ mạnh tới  $x^*$ . Định lý được chứng minh.  $\square$

**Chú ý 2.1.** Trong trường hợp  $S_i$  ( $i \in I$ ) là ánh xạ đồng nhất, bài toán (2.1) được viết dưới dạng bài toán cân bằng quen thuộc và dãy lặp trong (2.1) được viết lại như sau:

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ x^{k+1} \in Pr_C^{\epsilon_k}(x^k - \gamma_k u^k), u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(x^k, x^k). \end{cases} \quad (2.13)$$

Khi đó, lược đồ chiếu dưới đạo hàm (2.13) trở thành phương pháp xấp xỉ chiếu dưới đạo hàm IPSM để giải bài toán cân bằng (3.20) của Santos và Scheimberg trong [73], với giả thiết  $f$  là paramonotone trên  $C$ . Như vậy, theo một cách nào đó, có thể hiểu Thuật toán 2.1 là sự mở rộng từ phương pháp IPSM của Santos và Scheimberg.

## 2.2 Phương pháp dưới đạo hàm song song

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu phương pháp dưới đạo hàm song song giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động (2.1) và chứng minh sự hội tụ của thuật toán với giả thiết  $f$  là song hàm  $\beta$ -đơn điệu mạnh, liên tục yếu trên  $\mathbb{H}$ . Với mọi  $\epsilon > 0$ ,  $\partial_2^\epsilon f(x, x)$  compact, liên tục Lipschitz với hằng số  $L > 0$  trên  $\mathbb{H}$ .

**Thuật toán 2.2. Khởi tạo:** Lấy điểm bất kỳ  $x^0 \in \mathbb{H}$ .

**Các bước lặp:**  $k = 1, 2, \dots$

*Bước 1. Xây dựng dãy các dãy tham số dương*

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \in (0, \beta), 0 < \tau_k \leq \gamma_k < \min \left\{ \frac{2\beta}{L^2}, \frac{2(\beta-\tau)}{L^2-\tau^2}, \frac{1}{\tau} \right\}, \\ 0 < a \leq \alpha_{k,i} < \min \left\{ \frac{1-\beta_i}{2} : i \in I \right\}, \\ \epsilon_k \leq \gamma_k, \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 < +\infty, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau_k < +\infty, \\ \mu \in \left( 0, \frac{2\beta}{L^2} \right), \\ \beta_k \in \left( 0, 1 - \gamma_k(1 - \sqrt{1 - 2\mu\beta + \mu^2 L^2}) \right). \end{array} \right. \quad (2.14)$$

*Bước 2. Tính*

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i^k = (1 - \alpha_{k,i})x^k + \alpha_{k,i}S_i(x^k), \quad \forall i \in I, \\ y^k := y_{i_0}^k, \quad \text{với } i_0 \in \operatorname{argmax}\{\|y_i^k - x^k\| : i \in I\}, \\ x^{k+1} = \beta_k x^k + (1 - \beta_k)y^k - \mu\gamma_k u^k, \quad u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(y^k, y^k). \end{array} \right. \quad (2.15)$$

*Bước 3. Đặt  $k := k + 1$  và quay lại Bước 1.*

Sự hội tụ của thuật toán được chứng minh trong Định lý 2.2.

**Định lý 2.2.** Cho song hàm  $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là  $\beta$ -đơn điệu mạnh, liên tục yếu. Với mọi  $\epsilon > 0$ ,  $\partial_2^\epsilon f(x, x)$  compact, liên tục Lipschitz với hằng số  $L > 0$  trên  $\mathbb{H}$ . Với mỗi  $i \in I$ , ánh xạ  $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  là  $\beta_i$ -nửa co,  $\Omega \neq \emptyset$ . Khi đó, các dãy  $\{x^k\}$ ,  $\{y^k\}$  sinh bởi Thuật toán 2.2 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất  $x^*$  của bài toán (2.1).

*Chứng minh.* Gọi  $x^*$  là nghiệm duy nhất của bài toán (2.1). Lấy  $u^* \in \partial_2^{\epsilon_k} f(x^*, x^*)$  sao cho  $\|u^k - u^*\| \leq \rho(\partial_2^{\epsilon_k} f(y^k, y^k), \partial_2^{\epsilon_k} f(x^*, x^*))$ , khi đó,

$$\|x^{k+1} - x^*\| = \|\beta_k x^k + (1 - \beta_k)y^k - \mu\gamma_k u^k - x^*\|,$$

mà

$$\|\beta_k x^k + (1 - \beta_k)y^k - \mu\gamma_k u^k - x^*\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| [(1 - \beta_k)y^k - \mu\gamma_k u^k] - [(1 - \beta_k)x^* - \mu\gamma_k u^*] + \beta_k(x^k - x^*) - \mu\gamma_k u^* \right\| \\
&\leq \left\| (1 - \beta_k)y^k - \mu\gamma_k u^k \right\| - \left\| (1 - \beta_k)x^* - \mu\gamma_k u^* \right\| + \beta_k \|x^k - x^*\| + \mu\gamma_k \|u^*\| \\
&= \left\| (1 - \beta_k - \gamma_k)(y^k - x^*) + \gamma_k[(y^k - x^*) - \mu(u^k - u^*)] \right\| + \beta_k \|x^k - x^*\| \\
&\quad + \mu\gamma_k \|u^*\| \\
&\leq (1 - \beta_k - \gamma_k) \|y^k - x^*\| + \gamma_k \|(y^k - x^*) - \mu(u^k - u^*)\| + \beta_k \|x^k - x^*\| \\
&\quad + \mu\gamma_k \|u^*\|,
\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\| &\leq (1 - \beta_k - \gamma_k) \|y^k - x^*\| + \gamma_k \|(y^k - x^*) - \mu(u^k - u^*)\| \\
&\quad + \beta_k \|x^k - x^*\| + \mu\gamma_k \|u^*\|.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Do song hàm  $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là  $\beta$ -đơn điệu mạnh,  $u^k \in \partial_2^{\epsilon_k} f(y^k, y^k)$  và  $u^* \in \partial_2^{\epsilon_k}(x^*, x^*)$ , ta có

$$-\beta \|y^k - x^*\|^2 \geq f(y^k, x^*) + f(x^*, y^k) \geq -\langle y^k - x^*, u^k - u^* \rangle - 2\epsilon_k.$$

Ta lại có

$$\begin{aligned}
&\|y^k - x^*\|^2 - 2\mu \langle y^k - x^*, u^k - u^* \rangle + \mu^2 \|u^k - u^*\|^2 \\
&\leq (1 - 2\mu\beta) \|y^k - x^*\|^2 + \mu^2 \|u^k - u^*\|^2 + 4\mu\epsilon_k \\
&\leq (1 - 2\mu\beta) \|y^k - x^*\|^2 + \mu^2 \rho^2 (\partial_2^{\epsilon_k} f(y^k, y^k), \partial_2^{\epsilon_k} f(x^*, x^*)) + 4\mu\epsilon_k \\
&\leq (1 - 2\mu\beta) \|y^k - x^*\|^2 + \mu^2 L^2 \|y^k - x^*\|^2 + 4\mu\epsilon_k \\
&= (1 - 2\mu\beta + \mu^2 L^2) \|y^k - x^*\|^2 + 4\mu\epsilon_k.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\|y^k - x^* - \mu(u^k - u^*)\|^2 \leq (1 - 2\mu\beta + \mu^2 L^2) \|y^k - x^*\|^2 + 4\mu\epsilon_k.$$

Do đó

$$\|y^k - x^* - \mu(u^k - u^*)\| \leq \bar{\delta} \|y^k - x^*\| + 2\sqrt{\mu\epsilon_k},$$

với  $\bar{\delta} := \sqrt{1 - 2\mu\beta + \mu^2 L^2}$ . Kết hợp điều này với (2.16), ta xác định được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \left[ (1 - \beta_k - \gamma_k) \|y^k - x^*\| + \gamma_k \|(y^k - x^*) - \mu(u^k - u^*)\| \right. \\
&\quad \left. + \beta_k \|x^k - x^*\| + \mu\gamma_k \|u^*\| \right]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[ (1 - \beta_k - \gamma_k) \|y^k - x^*\| + \gamma_k \bar{\delta} \|y^k - x^*\| + \beta_k \|x^k - x^*\| \right. \\
&\quad \left. + \mu \gamma_k \|u^*\| + 2\gamma_k \sqrt{\mu \epsilon_k} \right]^2 \\
&= \left[ (1 - \beta_k - \gamma_k (1 - \bar{\delta})) \|y^k - x^*\| + \beta_k \|x^k - x^*\| \right. \\
&\quad \left. + \gamma_k (1 - \bar{\delta}) \frac{\mu \|u^*\| + 2\sqrt{\mu \epsilon_k}}{1 - \bar{\delta}} \right]^2 \\
&\leq [1 - \beta_k - \gamma_k (1 - \bar{\delta})] \|y^k - x^*\|^2 + \beta_k \|x^k - x^*\|^2 \\
&\quad + \frac{\gamma_k (\mu \|u^*\| + 2\sqrt{\mu \epsilon_k})^2}{1 - \bar{\delta}}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Từ (2.6) và (2.17), ta suy ra

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq (1 - \beta_k - \gamma_k (1 - \bar{\delta})) \|y^k - x^*\|^2 + \beta_k \|x^k - x^*\|^2 \\
&\quad + \frac{\gamma_k (\mu \|u^*\| + 2\sqrt{\mu \epsilon_k})^2}{1 - \bar{\delta}} \\
&\leq [1 - \gamma_k (1 - \bar{\delta})] \|x^k - x^*\|^2 + \frac{\gamma_k (\mu \|u^*\| + 2\sqrt{\mu \epsilon_k})^2}{1 - \bar{\delta}} \\
&\quad - \alpha_{k,i_0} (1 - \alpha_{k,i_0} - \beta_{i_0}) (1 - \beta_k - \gamma_k (1 - \bar{\delta})) \|x^k - S_{i_0}(x^k)\|^2.
\end{aligned}$$

Lập luận tương tự như Định lý 2.1 ta chứng minh được Định lý 2.2.  $\square$

### 2.3 Một số ví dụ minh họa và kết quả tính toán

Xét bài toán (2.1), với  $C$  là đa giác lồi cho trong ví dụ [13, Example 5.1]

$$C = \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^5, \\ x_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \leq 3. \end{cases}$$

Các ánh xạ  $S_i : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5 (i = 1, 2)$  được xác định như sau:

$$S_1(x) = \left( \frac{1}{3}x_1, \sin x_2, \frac{1}{3}x_3, x_4, \sin^3 x_5 \right), S_2(x) = \left( x_1, \frac{1}{2}x_2, \sin x_3, \sin^2 x_4, \frac{1}{4}x_5 \right).$$

Bài toán song hàm cân bằng  $f : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$  [69] có dạng

$$f(x, y) = \langle F(x) + Qy + q, y - x \rangle,$$

với  $A, B, D$  lần lượt là các ma trận vuông, ma trận phản xứng, ma trận đường chéo cấp  $5 \times 5$  và  $Q = AA^T + B + D$  ([13]),  $q$  là một vectơ trong

$\mathbb{R}^5$ ,  $\eta > 1 + \|Q\|$ ,

$$F(x) = (\eta x_1 + \eta x_2 + \sin x_1, -\eta x_1 + \eta x_2 + \sin x_2, (\eta - 1)x_3, (\eta - 1)x_4, (\eta - 1)x_5).$$

Trước tiên, ta chỉ ra  $F$  liên tục Lipschitz trên  $C$  với  $L = \sqrt{2(2\eta^2 + 2\eta + 1)}$ .  
Thật vậy

$$\begin{aligned} & |[\eta x_1 + \eta x_2 + \sin x_1] - [\eta y_1 + \eta y_2 + \sin y_1]| \\ & \leq \eta|x_1 - y_1| + \eta|x_2 - y_2| + |\sin x_1 - \sin y_1| \\ & \leq (\eta + 1)|x_1 - y_1| + \eta|x_2 - y_2|. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$|[-\eta x_1 + \eta x_2 + \sin x_2] - [-\eta y_1 + \eta y_2 + \sin y_2]| \leq \eta|x_1 - y_1| + (\eta + 1)|x_2 - y_2|. \quad (2.19)$$

Từ (2.18), (2.19) dẫn đến

$$\begin{aligned} & |[\eta x_1 + \eta x_2 + \sin x_1] - [\eta y_1 + \eta y_2 + \sin y_1]|^2 \\ & + |[-\eta x_1 + \eta x_2 + \sin x_2] - [-\eta y_1 + \eta y_2 + \sin y_2]|^2 \\ & + |(\eta - 1)x_3 - (\eta - 1)y_3|^2 + |(\eta - 1)x_4 - (\eta - 1)y_4|^2 \\ & + |(\eta - 1)x_5 - (\eta - 1)y_5|^2 \\ & \leq [(\eta + 1)|x_1 - y_1| + \eta|x_2 - y_2|]^2 + [\eta|x_1 - y_1| + (\eta + 1)|x_2 - y_2|]^2 \\ & \quad + (\eta - 1)^2|x_3 - y_3|^2 + (\eta - 1)^2|x_4 - y_4|^2 + (\eta - 1)^2|x_5 - y_5|^2 \\ & \leq 2(2\eta^2 + 2\eta + 1)\|x - y\|^2, \end{aligned}$$

Như vậy,

$$\|F(x) - F(y)\|^2 \leq 2(2\eta^2 + 2\eta + 1)\|x - y\|^2. \quad (2.20)$$

Bất đẳng thức (2.20) hiển nhiên đúng do  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  với mọi  $a, b \in \mathbb{R}$ . Khi đó,  $F$  là ánh xạ liên tục Lipschitz với hằng số liên tục  $L := \sqrt{2(2\eta^2 + 2\eta + 1)}$ .

Tiếp theo, ta cần chỉ ra  $F$  là  $(\eta - 1)$ -đơn điệu mạnh trên  $\mathbb{R}^5$ . Thật vậy, lấy  $x = (x_1, \dots, x_5)^\top \in \mathbb{R}^5$ ,  $y = (y_1, \dots, y_5)^\top \in \mathbb{R}^5$ , áp dụng Định lý Lagrange:

$$[\sin x_1 - \sin y_1](x_1 - y_1) = (x_1 - y_1)^2 \cos c_1 \geq -(x_1 - y_1)^2$$



$$[\sin x_2 - \sin y_2](x_2 - y_2) = (x_2 - y_2)^2 \cos c_2 \geq -(x_2 - y_2)^2,$$

với  $c_1 \in (x_1; y_1), c_2 \in (x_2; y_2)$  ta có,

$$\begin{aligned} & [\eta x_1 + \eta x_2 + \sin x_1 - \eta y_1 - \eta y_2 - \sin y_1](x_1 - y_1) \\ & + [-\eta x_1 + \eta x_2 + \sin x_2 + \eta y_1 - \eta y_2 - \sin y_2](x_2 - y_2) \\ & + (\eta - 1)(y_3 - x_3)^2 + (\eta - 1)(y_4 - x_4)^2 + (\eta - 1)(y_5 - x_5)^2 \\ = & \eta(y_1 - x_1)^2 + [\sin x_1 - \sin y_1](x_1 - y_1) \\ & + \eta(y_2 - x_2)^2 + [\sin x_2 - \sin y_2](x_2 - y_2) \\ & + (\eta - 1)(y_3 - x_3)^2 + (\eta - 1)(y_4 - x_4)^2 + (\eta - 1)(y_5 - x_5)^2 \\ \geq & (\eta - 1)(y_1 - x_1)^2 + (\eta - 1)(y_2 - x_2)^2 + (\eta - 1)(y_3 - x_3)^2 \\ & + (\eta - 1)(y_4 - x_4)^2 + (\eta - 1)(y_5 - x_5)^2 \\ = & (\eta - 1)\|x - y\|^2, \end{aligned}$$

hay

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \leq (\eta - 1)\|x - y\|^2.$$

Điều này chứng tỏ rằng  $F$  là  $(\eta - 1)$ -đơn điệu mạnh trên  $\mathbb{R}^5$ . Sử dụng Bổ đề 6.1(i) trong [69], ta kết luận được song hàm  $f$  là đơn điệu mạnh với hằng số  $(\eta - \|Q\| - 1)$  trong trường hợp  $\eta > 1 + \|Q\|$ . Với mỗi  $x \in \mathbb{R}^5$ , ta có

$$\partial_2^\epsilon f(x, x) = \{F(x) + Qx + q\}.$$

Khi đó, lược đồ (2.3) giải bài toán (2.1) được xác định như dưới đây:

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ y_i^k = (1 - \alpha_{k,i})x^k + \alpha_{k,i}S_i(x^k) \quad i = 1, 2, \\ y^k := y_{i_0}^k, \text{ với } i_0 \in \operatorname{argmax}\{\|y_i^k - x^k\| : i = 1, 2\}, \\ u^k = F(x^k) + Qx^k + q, x^{k+1} \in Pr_C^{\epsilon_k}(y^k - \gamma_k u^k). \end{cases}$$

Các ma trận  $A, B, D$ , vectơ  $q$  (được sinh ngẫu nhiên)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

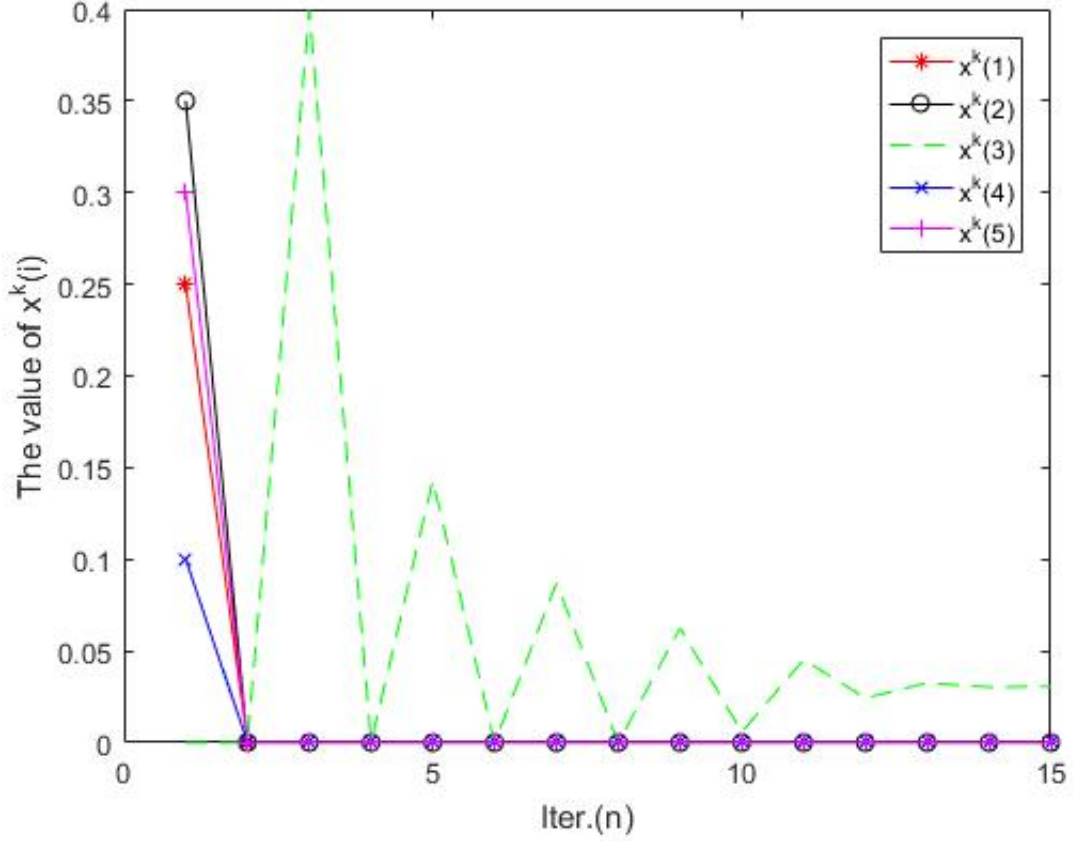
Giá trị riêng nhỏ nhất của  $Q$  là 10.2313, chuẩn của ma trận  $Q$  là 58.9677. Do  $F$  liên tục Lipschitz với hằng số liên tục là  $L = \sqrt{2(2\eta^2 + 2\eta + 1)}$  và  $(\eta - 1)$ -đơn điệu mạnh, ta có

- $\partial_2^\epsilon f(x, x) = \{F(x) + Qx + q\}$  là đơn điệu mạnh với hằng số  $\beta := \eta + 9.3213$ ;
- $\partial_2^\epsilon f(x, x)$  là liên tục Lipschitz với hằng số  $L := \sqrt{2(2\eta^2 + 2\eta + 1)} + 58.9677$ .

Các chương trình tính toán được chạy trên phần mềm MATLAB R2013a, trên máy tính Laptop Intel(R) Core(TM) i3-3110M CPU@2.40GHz 2.40GHz 4Gb RAM. Phép chiếu trong lược đồ tính toán (2.3) được tính thông qua việc giải bài toán lồi mạnh toàn phương bằng công cụ có sẵn là hàm `fmincon` trong MATLAB. Nghiệm tìm được là nghiệm xấp xỉ  $\epsilon$  của các thuật toán (2.3), (2.15), nếu  $\max\{\|y^k - x^k\|, \|x^{k+1} - x^k\|\} \leq \epsilon$ .

**Thử nghiệm 1.** Lấy  $\eta := 50 + \|Q\| = 104.8319$ ,  $\alpha_{k,i} := 0.01 + \frac{1}{k+100}$  với mọi  $i = 1, 2$ ,  $\epsilon_k = 0$ ,  $\gamma_k = \frac{1}{7k+10}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Kết quả tính toán của Thuật toán 2.1 được thể hiện trong Hình 2.1.

**Thử nghiệm 2.** Lấy  $\mu = \frac{\beta}{L^2} \in (0, \frac{2\beta}{L^2}) = 0.0016$ ,  
 $\beta_k = \frac{1}{2}[1 - \gamma_k(1 - \sqrt{1 - 2\mu\beta + \mu^2 L^2})] \in (0, 1 - \gamma_k(1 - \sqrt{1 - 2\mu\beta + \mu^2 L^2}))$



Hình 2.1: Lược đồ tính toán (2.3) với  $x^0 = (0.25, 0.35, 0.0, 0.1, 0.3)^T$ , sai số  $\epsilon = 10^{-3}$ .

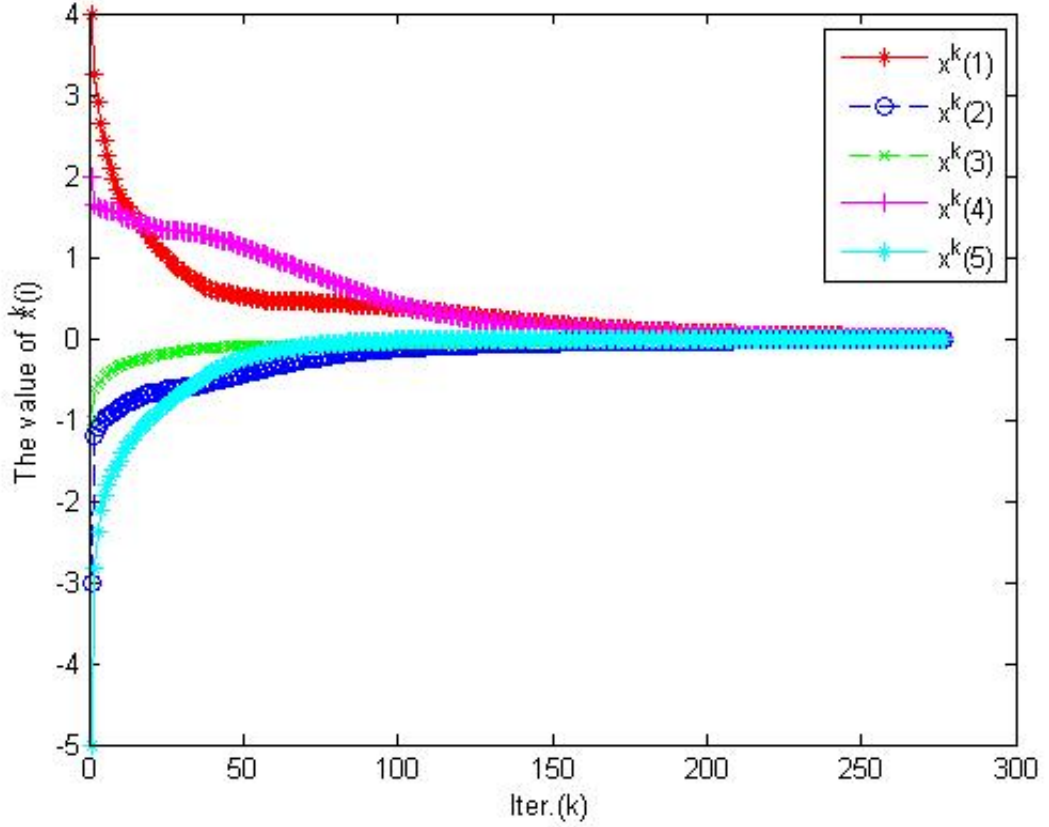
,  $\eta := 50 + \|Q\| = 104.8319$ ,  $\alpha_{k,i} := 0.1 + \frac{1}{k+5}$  với mọi  $i = 1, 2$ ,  $\epsilon_k = 0$ ,  
 $\gamma_k = \frac{1}{7k+10}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Kết quả tính toán số của Thuật toán 2.1 được cho trong Hình 2.2.

**Thử nghiệm 3.** Để so sánh (2.3), (2.15) với phương pháp kiểu dưới đạo hàm (*STM*) của Iiduka và Yamada trong [46, Algorithm 3.2] giải bài toán cân bằng với song hàm  $f$  trên tập điểm bất động  $Fix(S_1)$ . Các dữ liệu đầu vào như ma trận  $A$ , vectơ  $q$  được sinh ngẫu nhiên trong khoảng  $(-3, 3)$ , ma trận đường chéo  $D$  được sinh ngẫu nhiên trong khoảng  $(0, 1)$  bởi các câu lệnh

$$A = 6 * rand(5, 5) - 3, B = skewdec(5, 1), D = diag(1 : 5).$$

Chọn  $\eta := 50 + \|Q\| = 104.8319$  và  $\beta = \eta + 9.3213$ . Như đã biết, nếu  $\max\{\|x^{k+1} - y^k\|, \|y^k - x^k\|\} \leq \epsilon$ , thì  $x^k$  được gọi là  $\epsilon$ - nghiệm của bài



Hình 2.2: Lược đồ tính toán (2.15) với  $x^0 = (4, -3, -1, 2, -5)^T$ , sai số  $\epsilon = 10^{-3}$ . Nghiệm xấp xỉ  $x^* = (0.0136, -0.0121, -0.0023, 0.0073, -0.0001)^T$ .

toán (2.1). Bộ tham số và các dữ liệu khác của thuật toán được chọn như sau:

- (i) Thuật toán 2.1:  $\alpha_{k,i} := 0.01 + \frac{1}{k+100}$  với mọi  $i = 1, 2$ ,  $\epsilon_k = 0$ ,  $\gamma_k = \frac{1}{7k+10}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , điểm khởi tạo  $x^0 = (0.25, 0.35, 0.0, 0.1, 0.3)^T$ .
- (ii) Thuật toán 2.2:  $\mu = \frac{\beta}{L^2} \in (0, \frac{2\beta}{L^2}) = 0.0016$ ,  $\beta_k = \frac{1}{2}[1 - \gamma_k(1 - \sqrt{1 - 2\mu\beta + \mu^2 L^2})] \in (0, 1 - \gamma_k(1 - \sqrt{1 - 2\mu\beta + \mu^2 L^2}))$ ,  $\eta := 50 + \|Q\| = 104.8319$ ,  $\alpha_{k,i} := 0.1 + \frac{1}{k+5}$ , điểm khởi tạo  $x^0 = (0.25, 0.35; 0, 0.1, 0.3)^T$ .
- (iii) Thuật toán (STM):  $x^0 = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ ,  $\rho_0 = \|x^0\|$ ,  $\epsilon_k = 0$ ,  $\xi^k = F(y^k) + Q(2x^k - y^k) + q \in \partial_2 f(y^k, x^k)$ . Rõ ràng  $M \leq L + \|Q\|$ , ta chọn  $M = 2L + \|Q\|$ ,  $\lambda_k = \frac{1}{M^2} \in (0, \frac{2}{M^2})$ . Tại mỗi bước lặp,  $y^k \in C_k := \{x \in \mathbb{R}^5 : \|x\| \leq \rho_k + 1\}$  thỏa mãn  $f(y^k, x^k) \geq 0$  và  $\max\{f(y, x^k) : y \in C_k\} \leq f(y^k, x^k) + \epsilon_k$ . Khi đó,  $y^k$  được xác định bởi

$$y^k = \operatorname{argmin} \{ -f(y, x^k) : y \in C_k \}.$$

Problems $k$	Thuật toán 2.1		Thuật toán 2.2		Thuật toán ( $STM$ )	
	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)
k=1	87	11.0156	279	0.0938	178	28.9063
k=2	87	10.1250	274	0.0313	174	28.6875
k=3	88	9.7813	271	0.0469	168	27.2813
k=4	85	8.5469	273	0.0467	172	27.5000
k=5	90	7.4063	273	0.0625	177	30.3281
k=6	89	7.9375	280	0.0625	176	28.8594
k=7	88	7.9375	276	0.0313	171	27.1406
k=8	87	8.2813	271	0.0625	175	28.0625
k=9	86	7.0094	277	0.0625	178	27.8438
k=10	92	8.1031	274	0.0627	170	27.2656

Bảng 2.1: Kết quả so sánh của các thuật toán với  $\epsilon = 10^{-3}$ .

Thuật toán dừng khi  $\|x^{k+1} - y^k\| \leq \epsilon$ .

Các kết quả so sánh được ghi trong Bảng 2.3.

**Thử nghiệm 4.** Xét không gian Hilbert thực  $\mathbb{H} := L^2([0, 1])$  với tích vô hướng  $\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(t)y(t)dt$  với mọi  $x, y \in \mathbb{H}$  và chuẩn

$$\|x\| := \left( \int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

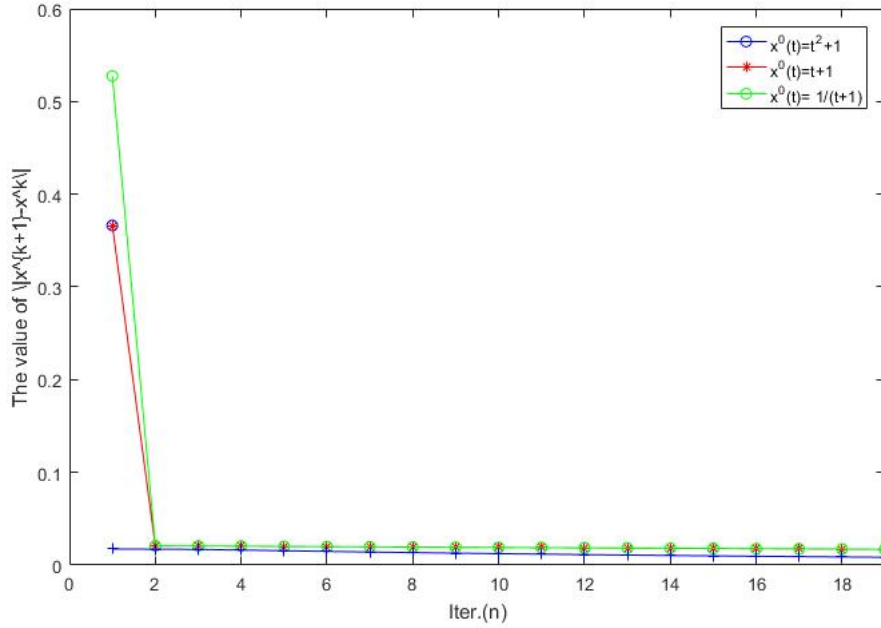
Lấy tập  $C := \{x \in \mathbb{H} : \|x\| \leq 1\}$ . Song hàm giá  $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  có dạng  $f(x(t), y(t)) = \langle \max\{0, x(t)\}, y(t) - x(t) \rangle$  với mọi  $t \in [0, 1]$  và  $x \in \mathbb{H}$ . Rõ ràng  $f$  đơn điệu, liên tục 1-Lipschitz. Xét các nửa không gian  $H_i$  xác định bởi  $H_i := \{x \in \mathbb{H} : \langle a_i, x \rangle \leq b_i\}$ , với  $a_i, b_i \in \mathbb{H}$ , ( $i \in I := \{1, 2, 3\}$ ). Hơn nữa, với mỗi  $i \in I$ , các ánh xạ  $S_i = Pr_C Pr_{H_i}$  ( $i \in I := \{1, 2, 3\}$ ) là ánh xạ không giãn. Chú ý rằng, với mỗi  $x \in \mathbb{H}$ , phép chiếu của  $x$  trên  $H_i$  được xác định:

$$Pr_{H_i}(x) = \begin{cases} x - \frac{\langle a_i, x \rangle - b_i}{\|a_i\|^2} a_i & \text{nếu } x \notin H_i \\ x & \text{nếu } x \in H_i. \end{cases}$$

Ta lấy

$$a_i(t) = (2i + 1)t + 3, b_i(t) = 2t^2 + (4i - 5)t + i, \quad \forall i \in I, t \in \mathbb{R}.$$

Các tham số của Thuật toán 2.1 được chọn như ở Thử 1. Điều kiện dừng  $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$  với  $\epsilon = 10^{-3}$ . Kết quả tính toán thể hiện trên Hình 2.3 với các điểm khởi tạo  $x^0(t)$  khác nhau.



Hình 2.3: Kết quả tính toán với các điểm khởi tạo  $x^0(t)$  khác nhau.

## 2.4 Phương pháp chiếu đạo hàm tăng cường song song

Bài toán BEP( $\Omega, f$ ): Cho  $I = \{1, \dots, r\}$ ,  $J = \{1, \dots, m\}$ ,  $S_i : C \rightarrow C$  là ánh xạ  $\beta_i$ -nửa co,  $C$  là tập con lồi đóng khác rỗng trong  $\mathbb{H}$ , các song hàm cân bằng  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_j : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, x) = 0, g_j(x, x) = 0 \forall x \in C$ .

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in \Omega, \quad (2.21)$$

với  $\Omega = \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i) \cap \bigcap_{j \in J} S_{(C, g_j)}$  là giao giữa tập nghiệm của bài toán cân bằng với tập các điểm bất động của ánh xạ nửa co. Như ta đã biết, khi song hàm  $g_j$  là giả đơn điệu và liên tục trên  $C$ , tập  $\Omega$  lồi, đóng và rất khó biểu diễn được dưới dạng hiện.

### 2.4.1 Thuật toán và định lý hội tụ

Trong phần này chúng tôi sẽ trình bày các bước tính toán của thuật toán với kỹ thuật xấp xỉ dưới đạo hàm tăng cường và phép chiếu khoảng cách xấp xỉ.

**Thuật toán 2.3. Khởi tạo:** Lấy điểm bất kỳ  $x^0 \in C$ .

**Các bước lặp:**  $k = 1, 2, \dots$

*Bước 1. Xây dựng dãy các tham số*

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \in (0, \beta), \tau_k \leq \gamma_k < \min \left\{ \frac{2\beta}{L^2}, \frac{2(\beta-\tau)}{L^2-\tau^2}, \frac{1}{\tau} \right\}, \\ 0 < a \leq \alpha_{k,i} \leq \min \left\{ \frac{1-\beta_i}{2} : i \in I \right\}, \\ 0 < \bar{a} \leq \rho_{k,j} \leq \bar{b} < \min \left\{ \frac{1}{2c_{1j}}, \frac{1}{2c_{2j}} : j \in J \right\}, \\ \epsilon_k \leq \gamma_k, \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 < +\infty, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau_k < +\infty. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

*Bước 2. Tính*

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i^k = (1 - \alpha_{k,i})x^k + \alpha_{k,i}S_i(x^k), \quad \forall i \in I, \\ y^k := y_{i_0}^k, \quad \text{với } i_0 \in \operatorname{argmax}\{\|y_i^k - x^k\| : i \in I\}, \\ z_j^k = \operatorname{argmin} \left\{ \rho_{k,j}g_j(y^k, y) + \frac{1}{2}\|y - y^k\|^2 : y \in C \right\}, \\ \bar{z}_j^k = \operatorname{argmin} \left\{ \rho_{k,j}g_j(z_j^k, y) + \frac{1}{2}\|y - y^k\|^2 : y \in C \right\}, \\ z^k := \bar{z}_{j_0}^k, \quad \text{với } j_0 \in \operatorname{argmax}\{\|\bar{z}_j^k - y^k\| : j \in J\}, \\ x^{k+1} \in \operatorname{Pr}_C^{\epsilon_k}(z^k - \gamma_k u^k), u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(z^k, z^k). \end{array} \right. \quad (2.23)$$

*Bước 3. Đặt  $k := k + 1$  và quay lại Bước 1.*

Chú ý rằng, Thuật toán 2.3 là một thuật toán mở rộng của Thuật toán 2.1 trong trường hợp  $g_j = 0$  với mọi  $j \in J$ . Do vậy, một số kỹ thuật chứng minh định lý hội tụ dưới đây được trình bày dựa trên kỹ thuật chứng minh của Định lý 2.1 và kỹ thuật dưới đạo hàm tăng cường. Một vài kỹ thuật chứng minh có tính chất kế thừa, xin được trích dẫn từ các chứng minh trước.

**Bổ đề 2.6.** ([5, Lemma 3.1]) Cho  $C$  là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực  $\mathbb{H}$ . Song hàm  $h : C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  thỏa mãn các điều kiện:

- $h(x, x) = 0$  với mọi  $x \in C$ ;
- Với mỗi  $x \in C$ ,  $h(x, \cdot)$  lồi và khả dưới vi phân trên  $C$ ;
- $h$  giả đơn điệu trên  $C$ ;
- $h$  liên tục kiểu Lipschitz với hằng số  $\gamma_1 > 0$  và  $\gamma_2 > 0$ .

Khi đó, nếu  $\lambda \in \left(0, \min \left\{ \frac{1}{2\gamma_1}, \frac{1}{2\gamma_2} \right\} \right)$ , thì ánh xạ  $S$  xác định và với  $x \in C$ ,

$$y_x = \operatorname{argmin} \left\{ \lambda h(x, y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 : y \in C \right\},$$

$$S(x) = \operatorname{argmin} \left\{ \lambda h(y_x, y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 : y \in C \right\},$$

là tựa không giãn trên  $C$ .

**Định lý 2.3.** Cho  $f$  là song hàm  $\beta$ - đơn điệu mạnh liên tục yếu,  $\partial_2^\epsilon f(x, x)$  liên tục  $L$ - Lipschitz trên  $C$ . Với mỗi  $i \in I$ , cho ánh xạ  $S_i : C \rightarrow C$  là  $\beta_i$ - nửa co sao cho tập  $\Omega \neq \emptyset$ . Với  $g_j$  với mỗi  $j \in J$  là giả đơn điệu, liên tục yếu, liên tục kiểu Lipschitz với hằng số  $c_{1j}$  và  $c_{2j}$ . Khi đó các dãy  $\{x^k\}$ ,  $\{y^k\}$  và  $\{z^k\}$  sinh bởi thuật toán trên hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất  $x^*$  của bài toán (2.21).

*Chứng minh.* Gọi  $x^*$  là nghiệm duy nhất của bài toán (2.21). Ta chứng minh định lý theo các bước sau.

**Bước 1.** Ta có khẳng định

$$a_{k+1} \leq (1 - \tau\gamma_k) a_k + \frac{\gamma_k (3 + \|w_k^*\|)^2}{\tau} - \alpha_{k, i_0} (1 - \alpha_{k, i_0} - \beta_{i_0}) (1 - \tau\gamma_k) \|x^k - S_{i_0}(x^k)\|^2, \quad (2.24)$$

với  $a_k = \|x^k - x^*\|^2$ ,  $w_k^*$  là phép chiếu của  $x^k$  trên tập  $\partial_2^{\tau_k} f(x^*, x^*)$ . Hơn nữa,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - z^k\| = 0$ , các dãy  $\{x^k\}$ ,  $\{y^k\}$  và  $\{z^k\}$  bị chặn.

Thật vậy, đặt  $A_k(x) = x - \gamma_k \partial_2^{\tau_k} g(x, x)$  với mọi  $x \in C$ . Từ Chú ý 1.1, Bổ đề 2.1, điều kiện (2.22), ta có

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \|(z^k - \gamma_k u^k) - x^*\| + \epsilon_k$$



$$\begin{aligned}
&\leq \|(z^k - \gamma_k u^k) - (x^* - \gamma_k w_k^*)\| + \gamma_k \|w_k^*\| + \epsilon_k \\
&\leq \rho(A_k(z^k), A_k(x^*)) + \gamma_k \|w_k^*\| + \epsilon_k \\
&\leq \rho_k \|z^k - x^*\| + 2\sqrt{\gamma_k \tau_k} + \gamma_k \|w_k^*\| + \epsilon_k \\
&\leq (1 - \tau\gamma_k) \|z^k - x^*\| + \gamma_k(2 + \|w_k^*\|) + \epsilon_k \\
&\leq (1 - \tau\gamma_k) \|z^k - x^*\| + \gamma_k(3 + \|w_k^*\|), \tag{2.25}
\end{aligned}$$

với  $\rho_k = \sqrt{1 - \gamma_k(2\beta - \gamma_k L^2)}$ . Điều này có nghĩa là

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq [(1 - \tau\gamma_k) \|z^k - x^*\| + \gamma_k(3 + \|w_k^*\|)]^2 \\
&= \left[ (1 - \tau\gamma_k) \|z^k - x^*\| + \tau\gamma_k \frac{3 + \|w_k^*\|}{\tau} \right]^2 \\
&\leq (1 - \tau\gamma_k) \|z^k - x^*\|^2 + \frac{\gamma_k(3 + \|w_k^*\|)^2}{\tau}. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Đặt

$$z_j^k = \operatorname{argmin} \left\{ \rho_{k,j} g_j(x, y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 : y \in C \right\}$$

và

$$S_{k,j}(x) = \operatorname{argmin} \left\{ \rho_{k,j} g_j(z_j^k, y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 : y \in C \right\}.$$

Từ Bổ đề 2.6 và  $x^* \in \operatorname{Fix}(S_{k,j})$  với mọi  $k \in \mathbb{N}, j \in J$ , với mỗi  $k, j$  cố định, ánh xạ  $S_{k,j}$  là tựa không giãn. Khi đó,

$$\|z^k - x^*\| = \|\bar{z}_{j_0}^k - x^*\| = \|S_{k,j_0}(y^k) - x^*\| \leq \|y^k - x^*\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.27}$$

Với mỗi  $\alpha \in [0, 1)$ , đặt  $T_\alpha = (1 - \alpha)I + \alpha S_{i_0}$ . Sử dụng Bổ đề 2.4, ta có

$$\begin{aligned}
\|y^k - x^*\|^2 &= \|y_{i_0}^k - x^*\|^2 \\
&= \|T_{\alpha_k}(x^k) - x^*\|^2 \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 - \alpha_{k,i_0}(1 - \alpha_{k,i_0} - \beta_{i_0}) \|x^k - S_{i_0}(x^k)\|^2. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.26), (2.27) và (2.28), dẫn đến

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq (1 - \tau\gamma_k) \|z^k - x^*\|^2 + \frac{\gamma_k(3 + \|w_k^*\|)^2}{\tau} \\
&\leq (1 - \tau\gamma_k) \|x^k - x^*\|^2 + \frac{\gamma_k(3 + \|w_k^*\|)^2}{\tau} \\
&\quad - \alpha_{k,i_0}(1 - \alpha_{k,i_0} - \beta_{i_0})(1 - \tau\gamma_k) \|x^k - S_{i_0}(x^k)\|^2 \tag{2.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \tau\gamma_k)\|x^k - x^*\|^2 + \tau\gamma_k \frac{(3 + \|w_k^*\|)^2}{\tau^2} \\
&\leq \max\{\|x^k - x^*\|^2, K\} \\
&\leq \dots \\
&\leq \max\{\|x^0 - x^*\|^2, K\},
\end{aligned}$$

với

$$K = \frac{1}{\tau^2} \sup_k \{(3 + \|w_k^*\|)^2\} < +\infty.$$

Do đó, kết hợp với (2.24), (2.29) ta suy ra dãy  $\{x^k\}$  bị chặn. Từ (2.28), suy ra  $\|y^k - x^*\| \leq \|x^k - x^*\|$  và  $\{y^k\}$  bị chặn. Từ (2.27), dãy  $\{x^k\}$ ,  $\{y^k\}$  bị chặn, ta thấy  $\{z^k\}$  cũng bị chặn. Chú ý rằng  $x^{k+1} \in Pr_{C^k}^{\epsilon_k}(z^k - \gamma_k u^k)$ ,  $z^k \in Pr_{C^k}^{\epsilon_k}(z^k)$ , nên,

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - z^k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} [\gamma_k \|u^k\| + \epsilon_k] = 0.$$

Như vậy ta chứng minh xong khẳng định ở **Bước 1**.

**Bước 2.** Xét các trường hợp sau:

*Trường hợp 2.1.* Tồn tại  $k_0 \in \mathbb{N}$  sao cho  $a_{k+1} \leq a_k$  với mọi  $k \geq k_0$  nên  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A < +\infty$ . Kết hợp  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$ , (2.25), (2.27), (2.28),  $\{x^k\}$  bị chặn, ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k - x^*\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^*\|^2 = A.$$

Sử dụng định nghĩa của  $i_0$  và  $0 < a \leq \alpha_{k,i} \leq \frac{1-\beta_i}{2}$  với mọi  $i \in I$ , (2.28) suy ra

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \beta_{i_0}}{2} \|y_{i_0}^k - x^k\|^2 &\leq \frac{1 - \beta_{i_0}}{2} \|y_{i_0}^k - x^k\|^2 \\
&= \frac{\alpha_{k,i_0}(1 - \beta_{i_0})}{2} \|S_{i_0}(x^k) - x^k\|^2 \\
&\leq \alpha_{k,i_0}(1 - \beta_{i_0} - \alpha_{k,i_0}) \|x^k - S_{i_0}(x^k)\|^2 \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^*\|^2.
\end{aligned}$$

Khi đó,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{i_0}^k - x^k\|^2 = 0$  và

$$0 \leq a \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_i(x^k) - x^k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{k,i} \|S_i(x^k) - x^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y_i^k - x^k\| = 0, \quad \forall i \in I. \quad (2.30)$$

Áp dụng Bổ đề 2.6 với

$$x := y^k; \bar{x} := x^*; \lambda := \rho_{k,j_0}; \gamma_1 := c_1; y_x := z_{j_0}^k; \gamma_2 := c_2; S(x) := z^k; h := g_{j_0},$$

ta xác định được

$$\begin{aligned} \|z^k - x^*\|^2 &= \|\bar{z}_{j_0}^k - x^*\|^2 \\ &\leq \|y^k - x^*\|^2 - (1 - 2\rho_{k,j_0}c_1)\|z_{j_0}^k - y^k\|^2 - (1 - 2\rho_{k,j_0}c_2)\|z_{j_0}^k - \bar{z}_{j_0}^k\|^2 \\ &\leq \|y^k - x^*\|^2 - (1 - 2\bar{b}c_1)\|z_{j_0}^k - y^k\|^2 - (1 - 2\bar{b}c_2)\|z_{j_0}^k - \bar{z}_{j_0}^k\|^2. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối được suy ra từ điều kiện  $0 < \rho_{k,j} \leq \bar{b} < \min\left\{\frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2}\right\}$  với mọi  $j \in J, k \in \mathbb{N}$ . Kết hợp điều này và  $j_0 = \operatorname{argmax}\{\|\bar{z}_j^k - y^k\| : j \in J\}$  dẫn đến

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{j_0}^k - y^k\| \leq \frac{1}{1 - 2\bar{b}c_1} \lim_{k \rightarrow \infty} (\|y^k - x^*\|^2 - \|z^k - x^*\|^2) = 0.$$

Lập luận tương tự, ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{j_0}^k - z^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{j_0}^k - \bar{z}_{j_0}^k\| = 0$ . Khi đó,

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} [\|z^k - y^k\|] \leq \lim_{k \rightarrow \infty} [\|z_{j_0}^k - y^k\| + \|z_{j_0}^k - z^k\|] = 0.$$

Từ định nghĩa của  $j_0$ , ta thấy

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{z}_j^k - y^k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k - y^k\| = 0. \quad (2.31)$$

Sử dụng kết quả của **Bước 1**,  $\{y^k\}$  bị chặn, ta có thể giả sử  $y^{k_s} \rightharpoonup \bar{x} \in C$ , và sự hội tụ yếu của song hàm  $f$  ta suy ra

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(y^k, x^*)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [-f(y^{k_s}, x^*)] = -f(\bar{x}, x^*).$$

Do (2.30) nên  $x^{k_s} \rightharpoonup \bar{x}$ . Do đó,  $\bar{z}_j^{k_s} \rightharpoonup \bar{x}$  khi  $s \rightarrow \infty$  với mọi  $j \in J$ . Sử dụng tính nửa đóng tại không của  $S_i$  với mọi  $i \in I$ ,  $x^{k_s} \rightharpoonup \bar{x} \in C$  và (2.30), ta xác định  $\bar{x} \in \bigcap_{i \in I} \operatorname{Fix}(S_i)$ . Lập luận tương tự như chứng minh Bổ đề 2.6 với

$$z_j^k = \operatorname{argmin} \left\{ \rho_{k,j} g_j(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - y^k\|^2 : y \in C \right\},$$

ta có

$$\rho_{k,j} [g_j(y^k, y) - g_j(y^k, z_j^k)] \geq \langle z_j^k - y^k, z_j^k - y \rangle, \quad \forall y \in C, j \in J.$$

Trong bất đẳng thức này, thay  $y = \bar{z}_j^k \in C$ , ta thấy

$$\rho_{k,j} [g_j(y^k, \bar{z}_j^k) - g_j(y^k, z_j^k)] \geq \langle z_j^k - y^k, z_j^k - \bar{z}_j^k \rangle. \quad (2.32)$$

Do  $g_j$  liên tục kiểu Lipschitz và biểu thức (2.32), ta thấy

$$\begin{aligned} \rho_{k,j} g_j(z_j^k, \bar{z}_j^k) &\geq \rho_{k,j} [g_j(y^k, \bar{z}_j^k) - g_j(y^k, z_j^k)] - c_1 \rho_{k,j} \|z_j^k - y^k\|^2 - c_2 \rho_{k,j} \|\bar{z}_j^k - z_j^k\|^2 \\ &\geq \langle z_j^k - y^k, z_j^k - \bar{z}_j^k \rangle - c_1 \rho_{k,j} \|z_j^k - y^k\|^2 - c_2 \rho_{k,j} \|\bar{z}_j^k - z_j^k\|^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Do đó

$$\bar{z}_j^k = \operatorname{argmin} \left\{ \rho_{k,j} g_j(z_j^k, y) + \frac{1}{2} \|y - y^k\|^2 : y \in C \right\},$$

như vậy

$$\rho_{k,j} [g_j(z_j^k, y) - g_j(z_j^k, \bar{z}_j^k)] \geq \langle \bar{z}_j^k - y^k, \bar{z}_j^k - y \rangle, \quad \forall y \in C, j \in J. \quad (2.34)$$

Cộng các bất đẳng thức (2.33) và (2.34), ta nhận được bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \rho_{k,j} g_j(z_j^k, y) &\geq \langle z_j^k - y^k, z_j^k - \bar{z}_j^k \rangle - c_1 \rho_{k,j} \|z_j^k - y^k\|^2 - c_2 \rho_{k,j} \|\bar{z}_j^k - z_j^k\|^2 \\ &\quad + \langle \bar{z}_j^k - y^k, \bar{z}_j^k - y \rangle, \quad \forall y \in C, j \in J. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \rho_{k_s,j} g_j(z_j^{k_s}, y) &\geq \langle z_j^{k_s} - y^{k_s}, z_j^{k_s} - \bar{z}_j^{k_s} \rangle - c_1 \rho_{k_s,j} \|z_j^{k_s} - y^{k_s}\|^2 - c_2 \rho_{k_s,j} \|\bar{z}_j^{k_s} - z_j^{k_s}\|^2 \\ &\quad + \langle \bar{z}_j^{k_s} - y^{k_s}, \bar{z}_j^{k_s} - y \rangle, \quad \forall y \in C, j \in J. \end{aligned}$$

Cho  $s \rightarrow \infty$  trong bất đẳng thức trên và sử dụng tính liên tục yếu của  $g_j$ , giả thiết  $0 < a \leq \rho_{k,j} \leq b$  và (2.31), ta thu được

$$0 \leq \limsup_{s \rightarrow \infty} \rho_{k_s,j} g_j(z_j^{k_s}, y) \leq g_j(\bar{x}, y), \quad \forall y \in C.$$

Do đó,  $\bar{x} \in \bigcap_{j \in J} S(C, g_j)$ . Hay,  $\bar{x} \in \bigcap_{i \in I} \operatorname{Fix}(S_i) \cap \bigcap_{j \in J} S(C, g_j)$ .

Từ  $u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(z^k, z^k)$  và  $f(z^k, z^k) = 0$ , dẫn đến

$$f(z^k, x^*) = f(z^k, x^*) - f(z^k, z^k) \geq \langle u^k, x^* - z^k \rangle - \tau_k. \quad (2.35)$$

Kết hợp (1.4), (2.27), (2.28) và (2.35), với chú ý rằng  $x^{k+1} = \operatorname{Pr}_C^{\epsilon_k}(z^k - \gamma_k u^k)$ , ta thu được

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 = \|\operatorname{Pr}_C^{\epsilon_k}(z^k - \gamma_k u^k) - \operatorname{Pr}_C^{\epsilon_k}(x^*)\|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|z^k - \gamma_k u^k - x^*\|^2 + \epsilon_k^2 \\
&= \|z^k - x^*\|^2 - 2\gamma_k \langle u^k, z^k - x^* \rangle + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\
&\leq \|z^k - x^*\|^2 + 2\gamma_k [f(z^k, x^*) + \tau_k] + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 + 2\gamma_k f(z^k, x^*) + 2\gamma_k \tau_k + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là

$$2 \sum_{i=k_0}^k \gamma_i [-f(z^i, x^*)] \leq \|x^{k_0} - x^*\|^2 + 2 \sum_{i=k_0}^k \gamma_i \tau_i + M \sum_{i=k_0}^k \gamma_i^2 + \sum_{i=k_0}^k \epsilon_i^2, \quad \forall k \geq k_0,$$

với  $M = \sup\{\|u^k\|^2 : k \in \mathbb{N}\} < +\infty$ . Dưới điều kiện (2.22) và

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(z^k, x^*)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [-f(y^{k_s}, x^*)] = \liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(y^k, x^*)] = -f(\bar{x}, x^*) \geq 0,$$

ta kết luận được  $\liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(y^k, x^*)] = 0$ . Mặt khác, do song hàm  $f$  là  $\beta$ -đơn điệu mạnh, nên

$$\begin{aligned}
0 &\leq f(x^*, \bar{x}) \\
&= \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^*, y^k) \\
&\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} [-\beta \|y^k - x^*\|^2 - f(y^k, x^*)] \\
&= -\beta A + \liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(y^k, x^*)] = -\beta A.
\end{aligned}$$

Do đó  $A = 0$ , nghĩa là  $x^k \rightarrow x^*$ ,  $y^k \rightarrow x^*$  và  $z^k \rightarrow x^*$  khi  $k \rightarrow \infty$ .

*Trường hợp 2.2.* Giả sử không tồn tại  $k_1 \in \mathbb{N}$  sao cho  $a_{k+1} \leq a_k$  với mọi  $k \geq k_1$ . Khi đó, tồn tại một số nguyên dương  $k_0$  sao cho  $a_{k_0} \leq a_{k_0+1}$ . Từ Bổ đề 2.3, Maingé đưa ra dãy  $\{a_{\xi(k)}\}$  của  $\{a_k\}$  được định nghĩa như sau

$$\xi(k) = \max\{i \in \mathbb{N} : k_0 \leq i \leq k, a_i \leq a_{i+1}\}.$$

Khi đó, Maingé chỉ ra rằng

$$\xi(k) \nearrow +\infty, 0 \leq a_k \leq a_{\xi(k)+1}, a_{\xi(k)} \leq a_{\xi(k)+1}, \quad \forall k \geq k_0. \quad (2.37)$$

**Ở Bước 1**, ta đã chỉ ra dãy  $\{z^{\xi(k)}\}$  bị chặn, có dãy con hội tụ. Không mất tổng quát, ta giả sử rằng  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\xi(k)} = B < +\infty$  và  $z^{\xi(k)} \rightarrow \bar{x} \in C$ . Tương tự như Trường hợp 2.1, ta khẳng định được  $\bar{x} \in \Omega$  và  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^*, z^{\xi(k)}) = f(x^*, \bar{x}) \geq 0$ . Sử dụng (2.36) và tính  $\beta$ -đơn điệu mạnh của  $f$ , tức là,

$f(z^k, x^*) \leq -f(x^*, z^k) - \beta \|z^k - x^*\|^2$ , ta có

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leq a_k + 2\gamma_k f(z^k, x^*) + 2\gamma_k \tau_k + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\ &\leq a_k + 2\gamma_k [-f(x^*, z^k) - \beta \|z^k - x^*\|^2] + 2\gamma_k \tau_k + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dẫn đến

$$\begin{aligned} 2\gamma_{\xi(k)} f(x^*, z^{\xi(k)}) &\leq a_{\xi(k)} - a_{\xi(k)+1} - 2\gamma_{\xi(k)} \beta \|z^{\xi(k)} - x^*\|^2 + 2\tau_{\xi(k)} \gamma_{\xi(k)} \\ &\quad + \gamma_{\xi(k)}^2 \|u^{\xi(k)}\|^2 + \epsilon_{\xi(k)}^2 \\ &\leq -2\gamma_{\xi(k)} \beta \|z^{\xi(k)} - x^*\|^2 + 2\tau_{\xi(k)} \gamma_{\xi(k)} + \gamma_{\xi(k)}^2 \|u^{\xi(k)}\|^2 + \epsilon_{\xi(k)}^2. \end{aligned}$$

Do  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau_k < +\infty$  và dãy  $\{u^k\}$  bị chặn (chứng minh ở Bước 1), ta suy ra

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^*, z^{\xi(k)}) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^*, z^{\xi(k)}) = 0. \quad (2.39)$$

Từ (2.28), Chú ý 1.1, giả thiết  $\beta$ -đơn điệu mạnh của  $f$ , ta thu được

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \|Pr_C^{\epsilon_k}(z^k - \gamma_k u^k) - Pr_C^{\epsilon_k}(x^*)\|^2 \\ &\leq \|z^k - \gamma_k u^k - x^*\|^2 + \epsilon_k^2 \\ &= \|z^k - x^*\|^2 + 2\gamma_k \langle u^k, x^* - z^k \rangle + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\ &\leq \|z^k - x^*\|^2 + 2\gamma_k f(z^k, x^*) + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\ &\leq \|z^k - x^*\|^2 + 2\gamma_k [-f(x^*, z^k) - \beta \|z^k - x^*\|^2] + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\ &= (1 - 2\beta \gamma_k) \|z^k - x^*\|^2 - 2\gamma_k f(x^*, z^k) + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2 \\ &\leq (1 - 2\beta \gamma_k) a_k - 2\gamma_k f(x^*, z^k) + \gamma_k^2 \|u^k\|^2 + \epsilon_k^2. \end{aligned}$$

Điều này nghĩa là

$$a_{\xi(k)+1} \leq [1 - 2\beta \gamma_{\xi(k)}] a_{\xi(k)} - 2\gamma_{\xi(k)} f(x^*, z^{\xi(k)}) + \gamma_{\xi(k)}^2 \|u^{\xi(k)}\|^2 + \epsilon_{\xi(k)}^2.$$

Kết hợp điều này và (2.37), ta xác định được

$$a_{\xi(k)} \leq [1 - 2\beta \gamma_{\xi(k)}] a_{\xi(k)} - 2\gamma_{\xi(k)} f(x^*, z^{\xi(k)}) + \gamma_{\xi(k)}^2 \|u^{\xi(k)}\|^2 + \epsilon_{\xi(k)}^2.$$

Do đó

$$2\beta a_{\xi(k)} \leq -2f(x^*, z^{\xi(k)}) + \gamma_{\xi(k)} \|u^{\xi(k)}\|^2 + \epsilon_{\xi(k)}.$$

Cho  $k \rightarrow \infty$ , ta thấy  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\xi(k)} = 0$ , và  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\xi(k)+1} = 0$ . Kết hợp điều này và (2.37), ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . Do đó,  $\{x^k\}$  và  $\{y^k\}$  hội tụ mạnh tới  $x^*$ . Định lý được chứng minh.  $\square$

Tiếp theo, ta giả sử rằng  $f, S_i (i \in I)$  và  $g : C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  thỏa mãn các giả thiết:

- (A<sub>1</sub>) Song hàm  $f$  là  $\beta$ -đơn điệu mạnh, liên tục yếu và  $\partial_2^{\epsilon} f(x, x)$  liên tục Lipschitz trên  $C$  với hằng số  $L > 0$  với mọi  $\epsilon > 0$ ;
- (A<sub>2</sub>) Các ánh xạ  $\{S_i : i \in I\}$  là  $\beta_i$ -nửa co;
- (A<sub>3</sub>) Song hàm  $g$  giả đơn điệu, liên tục yếu, liên tục kiểu Lipschitz với các hằng số  $c_1 > 0, c_2 > 0, g(x, x) = 0$  với mọi  $x \in C$ .

Nếu  $S_i (i \in I)$  là ánh xạ đồng nhất và  $g_j = g (j \in J)$  thì ta có hệ quả của Định lý 2.3.

**Hệ quả 2.1.** Cho các dãy số dương  $\{\rho_k\}, \{\epsilon_k\}, \{\gamma_k\}, \{\tau_k\}$  thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \in (0, \beta), 0 < \tau_k \leq \gamma_k < \min \left\{ \frac{2\beta}{L^2}, \frac{2(\beta-\tau)}{L^2-\tau^2}, \frac{1}{\tau} \right\}, \\ 0 < \bar{a} \leq \rho_k \leq \bar{b} < \min \left\{ \frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2} \right\}, \\ \epsilon_k \leq \gamma_k, \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 < +\infty, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau_k < +\infty. \end{array} \right.$$

Khi đó, các dãy  $\{x^k\}, \{y^k\}$  được xác định theo lược đồ lặp sau đây:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^0 \in C, \\ y^k = \operatorname{argmin} \left\{ \rho_k g(x^k, y) + \frac{1}{2} \|y - x^k\|^2 : y \in C \right\}, \\ z^k = \operatorname{argmin} \left\{ \rho_k g(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - x^k\|^2 : y \in C \right\}, \\ x^{k+1} \in \operatorname{Pr}_C^{\epsilon_k}(z^k - \gamma_k u^k), u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(z^k, z^k), \end{array} \right. \quad (2.40)$$

hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng hai cấp (2.21).

Khi  $g_j = 0 (j \in J)$ , bài toán (2.21) có dạng bài toán cân bằng trên tập điểm bất động của ánh xạ nửa co  $S_i (i \in I)$ . Theo Định lý 2.3, lược đồ lặp

của bài toán (2.21) và sự hội tụ của các dãy lặp sinh bởi lược đồ được thể hiện qua khẳng định sau

**Hệ quả 2.2.** *Giả sử rằng các dãy  $\{x^k\}$ ,  $\{z^k\}$  được xác định như sau:*

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ y_i^k = (1 - \alpha_{k,i})x^k + \alpha_{k,i}S_i(x^k), \quad \forall i \in I, \\ y^k := y_{i_0}^k, \quad \text{với } i_0 \in \operatorname{argmax}\{\|y_i^k - x^k\| : i \in I\}, \\ x^{k+1} \in \operatorname{Pr}_C^{\epsilon_k}(y^k - \gamma_k u^k), \quad u^k \in \partial_2^{\tau_k} f(y^k, y^k). \end{cases} \quad (2.41)$$

Các dãy tham số dương  $\{\alpha_{k,i}\}(i \in I)$ ,  $\{\epsilon_k\}$ ,  $\{\gamma_k\}$ ,  $\{\tau_k\}$  được chọn thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} \tau \in (0, \beta), 0 < \tau_k \leq \gamma_k < \min\left\{\frac{2\beta}{L^2}, \frac{2(\beta-\tau)}{L^2-\tau^2}, \frac{1}{\tau}\right\}, \\ 0 < a \leq \alpha_{k,i} \leq \min\left\{\frac{1-\beta_i}{2} : i \in I\right\}, \\ \epsilon_k \leq \gamma_k, \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 < +\infty, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < +\infty, \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \tau_k < +\infty. \end{cases}$$

Khi đó, các dãy  $\{x^k\}$ ,  $\{y^k\}$  hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất  $x^*$  của Bài toán (2.21).

#### 2.4.2 Tính toán thực nghiệm

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số tính toán số minh họa cho các bước tính toán của lược đồ (2.40), lược đồ (2.41). Các chương trình tính toán được thực hiện trong môi trường MATLAB R2014a trên PC Intel(R) Core(TM) i5-7360U CPU @ 2.30GHz 8.00GB Ram. Chúng tôi cũng so sánh sự hội tụ của các dãy lặp sinh bởi các lược đồ tính toán đề xuất (2.41) với phương pháp kiểu dưới đạo hàm được đưa ra bởi Iiduka H., Yamada I. trong [46, Algorithm 3.2], Scheme (2.3) và Thuật toán xấp xỉ co trong [42, Algorithm 4.1], Scheme (2.40) và phương pháp dưới đạo hàm xấp xỉ của Anh P.N. trong [15, Algorithm 2]. Trước tiên, ta xét ví dụ



**Ví dụ 2.1.** [13, Example 5.1] Xét  $C$  là tập đa giác lồi xác định bởi

$$C = \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^5, \\ 0.1 \leq x_1, 0.1 \leq x_5, x_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \leq 3. \end{cases}$$

Ánh xạ  $S : C \rightarrow C$  được cho như sau

$$S(x) = \left( \frac{1}{3}x_1, \sin x_2, \frac{1}{3}x_3, x_4, \sin^3 x_5 \right).$$

Song hàm cân bằng  $f : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$  có dạng

$$f(x, y) = \langle F(x) + Qy + q, y - x \rangle,$$

với  $A, B, D$  lần lượt là các ma trận vuông, ma trận phản xứng, ma trận đường chéo cỡ  $5 \times 5$ ; ma trận  $Q = AA^\top + B + D$  được tạo như trong [13];  $q$  là một vectơ trong  $\mathbb{R}^5$ ,  $\eta > 1 + \|Q\|$ , và

$$F(x) = (\eta x_1 + \eta x_2 + \sin x_1, -\eta x_1 + \eta x_2 + \sin x_2, (\eta - 1)x_3, (\eta - 1)x_4, (\eta - 1)x_5).$$

Khi đó,  $f$  là song hàm đơn điệu mạnh với hằng số  $\beta = \eta - \|Q\| - 1$  ( $\eta > 1 + \|Q\|$ ). Với mỗi  $x \in \mathbb{R}^5$ , dưới vi phân theo biến thứ 2 của  $f$  được xác định như sau:

$$\partial_2^\epsilon f(x, x) = \{F(x) + Qx + q\}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Rõ ràng,  $\partial_2^\epsilon f(x, x)$  liên tục Lipschitz với hệ số liên tục  $L = \sqrt{2(2\eta^2 + 2\eta + 1)} + \|Q\|$ . Lược đồ (2.40) giải bài toán (2.21) có dạng:

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ y_i^k = (1 - \alpha_{k,i})x^k + \alpha_{k,i}S_i(x^k) \quad i = 1, 2, \\ y^k := y_{i_0}^k, \text{ với } i_0 \in \operatorname{argmax}\{\|y_i^k - x^k\| : i = 1, 2\}, \\ u^k = F(x^k) + Qx^k + q, x^{k+1} = \operatorname{Pr}_C^{\epsilon_k}(y^k - \gamma_k u^k), \end{cases}$$

Cũng như các phần đã trình bày ở trên, với sai số chấp nhận được  $\epsilon$  cho trước, ta có khái niệm  $\epsilon$ -nghiệm của (2.40) và (2.41):

$$\max\{\|y^k - x^k\|, \|x^{k+1} - x^k\|\} \leq \epsilon.$$

Các dữ liệu đầu vào như ma trận  $A$ , vectơ  $q$  được sinh ngẫu nhiên đều trong khoảng  $(-3, 3)$ , ma trận  $D$  sinh ngẫu nhiên trong  $(0, 1)$  bởi các câu lệnh trong MATLAB:

$$A = 6 * rand(5, 5) - 3, B = skewdec(5, 1), D = diag(1 : 5).$$

Chọn  $\eta := 50 + \|Q\| = 104.8319$ ,  $\beta = \eta + 9.3213$ . Thông thường, nếu  $\max\{\|x^{k+1} - y^k\|, \|y^k - x^k\|\} \leq \epsilon$ , thì  $x^k$  được gọi là  $\epsilon$ - nghiệm của bài toán (2.21). Các tham số khác và dữ liệu tính toán trong mỗi bước lặp được chọn như dưới đây:

(i) Lược đồ (2.41):  $\alpha_{k,i} := 0.01 + \frac{1}{k+100}$  với mọi  $i = 1, 2$ ,  $\epsilon_k = \tau_k = 0$ ,  $\gamma_k = \frac{1}{7k+10}$ , với mọi  $k \in \mathbb{N}$ , điểm khởi tạo  $x^0 = (0.25, 0.35, 0.0, 0.1, 0.3)^\top$ .

(ii) Phương pháp kiểu dưới đạo hàm (STM):  $x^0 = (1, 1, 1, 1, 1)^\top$ ,  $\rho_0 = \|x^0\|$ ,  $\epsilon_k = 0$ ,  $\xi^k = F(y^k) + Q(2x^k - y^k) + q \in \partial_2 f(y^k, x^k)$ . Rõ ràng  $M \leq L + \|Q\|$ . Ta chọn  $M = 2L + \|Q\|$ ,  $\lambda_k = \frac{1}{M^2} \in (0, \frac{2}{M^2})$ . Tại mỗi bước lặp,  $y^k \in C_k := \{x \in \mathbb{R}^5 : \|x\| \leq \rho_k + 1\}$  thỏa mãn điều kiện  $f(y^k, x^k) \geq 0$  và  $\max\{f(y, x^k) : y \in C_k\} \leq f(y^k, x^k) + \epsilon_k$ . Khi đó,  $y^k$  được xác định là

$$y^k = \operatorname{argmin} \{-f(y, x^k) : y \in C_k\}.$$

Thuật toán dừng khi  $\|x^{k+1} - y^k\| \leq \epsilon$ . Kết quả so sánh được thể hiện trong Bảng 2.2.

**Ví dụ 2.2.** Trong ví dụ tiếp theo này [44, Example 5.1], chúng tôi so sánh các thao tác tính toán của dưới đạo hàm mở rộng dưới đạo hàm (SubExtr) với Thuật toán xấp xỉ co 4.2 (ContrPA) trong [42]. Xét  $C = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 3\}$ ,  $f(x, y) = \langle Ax + By + d, Py - Px \rangle$  với

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Cho các tập

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 46 \geq 0\},$$

Problem	Lược đồ (2.41)		STM	
	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)
1	87	11.0156	178	28.9063
2	87	10.1250	174	28.6875
3	88	9.7813	168	27.2813
4	85	8.5469	172	27.5000
5	90	7.4063	177	30.3281
6	89	7.9375	176	28.8594
7	88	7.9375	171	27.1406
8	87	8.2813	175	28.0625
9	86	7.0094	178	27.8438
10	92	8.1031	170	27.2656

Bảng 2.2: Kết quả so sánh của lược đồ (2.41) và thuật toán dưới đạo hàm với sai số  $\epsilon = 10^{-3}$ .

$$D_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 5 \geq 0\},$$

$$D_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : -2x_1 + x_2 + x_3 - 6 \geq 0\}.$$

Khi đó, ánh xạ

$$T(x) = Pr_C \left\{ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{6}Pr_{D_1}(x) + \frac{1}{3}Pr_{D_2}(x) + \frac{1}{2}Pr_{D_3}(x) \right] \right\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

là ánh xạ không giãn. Với  $H = \{x \in \mathbb{H} : \langle a, x \rangle \leq b, a \neq 0\}$ . Phép chiếu của vectơ  $x$  bất kỳ trong  $\mathbb{H}$  trên  $\mathbb{H}$  có dạng

$$Pr_H(x) = x - \frac{\langle a, x \rangle - b}{\|a\|^2} a.$$

Như vậy,  $Pr_{D_k}(x)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) có dạng hiện. Khi đó,  $f$  là song hàm đơn điệu mạnh với các hằng số  $\beta = \|P^\top(A - B)\|$ ;  $f$  liên tục kiểu Lipschitz với các hằng số  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}\|P^\top(A - B)\|$ .

Bây giờ, ta xét bài toán (2.21) với  $f_j = 0$  ( $j \in J$ ),  $S_i = T$  ( $i \in I$ ). Trong cả hai lược đồ, chúng tôi sử dụng điều kiện dừng là  $\|x^{k+1} - x^k\| \leq 10^{-3}$ .

Các tham số tính toán và  $\partial_2 f$  được chọn như sau:

- Lược đồ *SubExtr*:  $\beta_i = 0, \alpha_{k,i} = 0.0001 + \frac{1}{5k+1}, \gamma_k = \frac{1}{100k+55}$ ,  
 $\partial_2 f(y^k, y^k) = \{P^\top[(A + B)y^k + d]\}$ ;

St. point $x^0$	<i>SubExtr</i>		<i>ContrPA</i>	
	Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)
(0, 0, 0)	30	2.0469	28	2.7406
(0, 1, 0)	50	3.8281	29	2.9375
(0, 1, 1)	34	2.5313	39	3.2969
(1, 1, 0)	53	4.0000	42	3.0313
(1, 0, 0)	39	2.9219	41	3.2188
(1, 0, 1)	35	2.6250	40	3.4688
(2, 0, 0)	53	3.9844	41	3.0469
(2, 1, 0)	60	4.2344	44	3.2344
(2, 0, 1)	45	3.3281	42	3.2656
(1, 1, 2)	33	2.3750	47	4.6927

Bảng 2.3: Kết quả so sánh trong ví dụ 2.2.

- Thuật toán *ContrPA*:  $\lambda_k = \frac{0.001}{k^{0.9}}$  với mọi  $k \geq 1$ .

Kết quả thực hiện tính toán được ghi trong Bảng 2.3.

**Ví dụ 2.3.** Cho  $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$ . Song hàm cân bằng  $f$  xác định như trong Ví dụ 2.1. Cho các ma trận  $P, \bar{P}$ , ( $\bar{P}$  là nửa đối xứng xác định dương);  $\bar{P} - P$  là nửa xác định không âm. Song hàm giá  $g$ , miền xác định  $C$  được chọn như dưới đây

$$g(x, y) = \langle Px + \bar{P}y + p, y - x \rangle, C = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 \leq x_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, 5\}. \quad (2.42)$$

Khi đó,  $g$  đơn điệu và liên tục. Với mỗi  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $g(x, \cdot)$  là lồi khả vi trong  $\mathbb{R}^n$ , hệ số liên tục kiểu Lipschitz với các hệ số  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}\|P - \bar{P}\|$ . Các ma trận đầu vào  $A, B, P, p, q$  được sinh ngẫu nhiên và đều trong  $(-3, 3)$ ,  $\xi = 58$ , ma trận đường chéo  $D$  được sinh ngẫu nhiên trong khoảng  $(0, 1)$ ,  $P = 3\bar{P} - I$  với  $I$  là ma trận đơn vị.

Tham số và dữ liệu tính toán trong mỗi thuật toán được chọn như sau:

- Lược đồ (2.40):  $\eta = \xi - 1 - \|Q\|$ ,  $\rho_k = \frac{1}{3c_1 + 150 + k}$ ,  $\gamma_k = \frac{1}{100k + 1}$ , điều kiện dừng  $\max\{\|y^k - x^k\|, \|x^{k+1} - y^k\|\} \leq \epsilon$ ;

Test prob.	Dim.No.	Scheme (2.40)		ASM	
		Iter.	CPU(s)	Iter.	CPU(s)
1	$n = 5$	7	1.1406	14	1.4688
2	$n = 5$	12	2.8438	12	1.3906
3	$n = 10$	12	2.8281	148	20.2969
4	$n = 10$	10	2.3750	36	3.7969
5	$n = 15$	14	3.7500	76	9.1875
6	$n = 15$	16	4.8125	113	17.2188
7	$n = 20$	19	5.7188	360	56.4844
8	$n = 20$	18	5.0469	281	43.9688
9	$n = 25$	17	5.5156	126	20.3281
10	$n = 25$	16	4.9844	409	54.6601

Bảng 2.4: Kết quả tính toán của Lược đồ (2.40) và phương pháp (ASM) với sai số  $\epsilon = 10^{-3}$ .

- Phương pháp dưới đạo hàm xấp xỉ (ASM):  $\eta = 5 + \|Q\|$ ,

$\xi_k = \frac{1}{k^2+10}$ ,  $\lambda_k = 200$ ,  $\beta_k = \frac{1}{7k+1}$  với mọi  $k \in \mathbb{N}$ . Khi đó,

$$u^k \in \partial_2 f(y^k, y^k) = \{F(y^k) + Qy^k + q\},$$

$$w^k \in \partial_2 g(x^k, x^k) = \{(P + \bar{P})x^k + p\}.$$

Điều kiện dừng của các thuật toán là  $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$ .

**Ví dụ 2.4.** Trong ví dụ này, xét  $\mathbb{H}$  là không gian Hilbert vô hạn chiều  $\mathbb{H} := L^2([0, 1])$  với tích vô hướng  $\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(t)y(t)dt$  với mọi  $x, y \in \mathbb{H}$  với chuẩn và tích vô hướng

$$\|x\| := \left( \int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tập khả thi  $C := \{x \in \mathbb{H} : \|x\| \leq 1\}$ . Song hàm giá  $g_j : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  có dạng  $g_j(x(t), y(t)) = \langle \max\{0, x(t)\}, y(t) - x(t) \rangle$  với mọi  $t \in [0, 1]$ ,  $j \in J$  và  $x \in \mathbb{H}$  và hàm kiểu Lyapunov  $f(x, y) := \|x - y\|^2 + \langle \eta x + \xi y + q, y - x \rangle$ , với  $\eta > \xi + 2$ .

Khi đó, ta có

$$f(x, y) + f(y, z) - f(x, z) = \|x - y\|^2 + \langle \eta x + \xi y + q, y - x \rangle + \|y - z\|^2$$

$$\begin{aligned}
& + \langle \eta y + \xi z + q, z - y \rangle - \|x - z\|^2 \\
& - \langle \eta x + \xi z + q, z - x \rangle \\
& = (\eta - \xi - 2) \langle y - x, z - y \rangle \\
& \geq (\eta - \xi - 2) \|y - x\| \|z - y\| \\
& \geq \frac{\eta - \xi - 2}{2} \|y - x\|^2 + \frac{\eta - \xi - 2}{2} \|z - y\|^2.
\end{aligned}$$

Do đó,  $f$  là liên tục kiểu Lipschitz với các hệ số  $c_1 = c_2 = \frac{\eta - \xi - 2}{2}$ . Với mỗi  $x, y \in \mathbb{H}$ , ta có

$$\begin{aligned}
f(x, y) + f(y, x) & = \|x - y\|^2 + \langle \eta x + \xi y + q, y - x \rangle + \|x - y\|^2 \\
& + \langle \eta y + \xi x + q, x - y \rangle \\
& = -(\eta - \xi - 2) \|x - y\|^2.
\end{aligned}$$

Như vậy,  $f$  là  $(\eta - \xi - 2)$ -đơn điệu mạnh,  $\partial_2^\nu f(x, x) = \{(\eta + \xi)x + q\}$  là liên tục Lipschitz với hệ số  $L := \eta + \xi$  với mọi  $\nu > 0$ . Rõ ràng  $g_j$  là tựa đơn điệu và liên tục kiểu Lipschitz với các hằng số  $c_{1j} = c_{2j} = \frac{1}{2}$ .

Cũng như vậy, xét các nửa không gian:  $H_i := \{x \in \mathbb{H} : \langle a_i, x \rangle \leq b_i\}$ ,  $a_i, b_i \in \mathbb{H}$ , ( $i \in I := \{1, 2, 3\}$ ). Hơn thế nữa, ta định nghĩa ánh xạ  $S_i = Pr_C Pr_{H_i}$   $i \in I$  là ánh xạ nửa co với hằng số  $\beta_i = 0$ . Chú ý rằng, với mỗi  $x \in \mathbb{H}$ , Phép chiếu của  $x$  trên  $H_i$  được định nghĩa như sau:

$$Pr_{H_i}(x) = \begin{cases} x - \frac{\langle a_i, x \rangle - b_i}{\|a_i\|^2} a_i & \text{nếu } x \notin H_i \\ x & \text{nếu } x \in H_i. \end{cases}$$

Chọn

$$a_i(t) = (2i + 1)t + 3, b_i(t) = 2t^2 + (4i - 5)t + i, \quad \forall i \in I, t \in \mathbb{R},$$

ta tính được

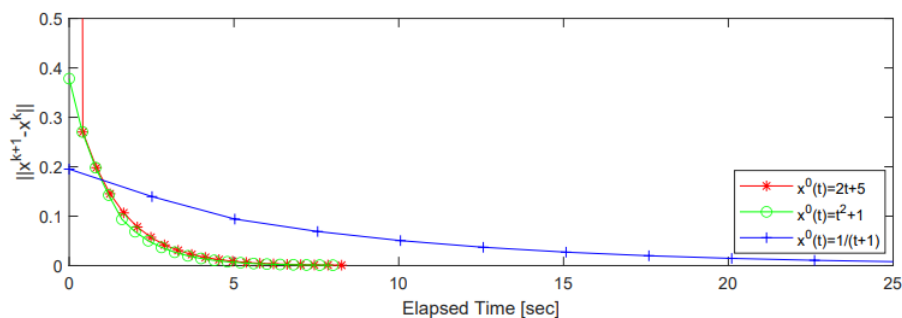
$$z_j^k = Pr_C[y^k - \rho_{k,j} \max\{0, y^k\}], \bar{z}_j^k = Pr_C[y^k - \rho_{k,j} \max\{0, z_j^k\}], u^k = (\eta + \xi)z^k + q,$$

và

$$x^{k+1} = Pr_C[z^k - \gamma_k u^k].$$

Các tham số của Thuật toán 2.3 được chọn như sau

$$\alpha_{k,i} = 0.0001 + \frac{1}{5k + 1}, \rho_{k,j} = 0.5, \gamma_k = \frac{1}{100k + 55}.$$



Hình 2.4: Kết quả tính toán với các điểm khởi tạo  $x^0(t)$  khác nhau.

Điều kiện hội tụ là  $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$  với  $\epsilon = 10^{-3}$ . Kết quả tính toán được cho trong Hình 2. 4 với các điểm khởi tạo khác nhau  $x^0(t)$ .

## Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày hai thuật toán mới để giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động. Thuật toán thứ nhất là Thuật toán chiếu song song dưới giả thiết  $f$  là đơn điệu mạnh, liên tục yếu. Thuật toán thứ hai giới thiệu Thuật toán dưới đạo hàm song song. Cuối chương trình bày phương pháp chiếu xấp xỉ song song là sự mở rộng của phương pháp thứ nhất với giả thiết song hàm  $f$  là nửa co. Sự hội tụ mạnh của các dãy lặp sinh bởi các lược đồ tính toán được chứng minh trong các Định lý 2.1, Định lý 2.2 và Định lý 2.3. Mỗi thuật toán đề xuất đều có một số ví dụ minh họa các bước tính toán trong các lược đồ lặp và so sánh với một số thuật toán của các tác giả khác đã được công bố.

## Chương 3

# Phương pháp dưới đạo hàm quán tính

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu thuật toán lặp mới giải bài toán cân bằng (2.1) trên tập ràng buộc là giao của các tập điểm bất động của ánh xạ nửa co trong không gian Hilbert.

Thuật toán thứ nhất có sử dụng một số kỹ thuật mới, chẳng hạn như phương pháp hướng giảm lai ghép và kỹ thuật dưới đạo hàm, để giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động  $FEP(\Omega, f)$ . Hơn thế nữa, sự hội tụ mạnh của dãy lặp sinh bởi Thuật toán được chứng minh trong Định lý 3.1 với các điều kiện trên các tham số.

Thuật toán thứ hai là sự kết hợp của kỹ thuật ngoại suy quán tính nhằm tăng tốc độ hội tụ của thuật toán, kỹ thuật chiếu song song và nguyên lý bài toán phụ giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động  $FEP(\Omega, f)$  với  $\Omega := \bigcap_{i \in I} Fix(S_i)$ . Cũng như các phương pháp bài toán phụ giải bài toán cân bằng, các kỹ thuật song song, cách tiếp cận gần kề quán tính cho bài toán bất đẳng thức biến phân để giải bài toán cân bằng với các ánh xạ nửa co  $S_i$  ( $i \in I$ ), phần này gồm 3 kỹ thuật chính. Thứ nhất, sử dụng kỹ thuật lặp quán tính với các dãy lặp  $x^k, x^{k-1}$  cho bước tiếp theo. Kỹ thuật tự điều chỉnh để tính độ dài bước và các tham số quán tính. Thứ hai, sử dụng kỹ thuật song song trên tập điểm bất động của từng ánh xạ. Thứ 3, dãy lặp  $x^{k+1}$  được tính dựa trên nguyên lý bài toán phụ và phương pháp lặp Mann. Sự hội tụ mạnh của dãy lặp sinh bởi thuật toán đề xuất được



chứng minh trong Định lý 3.2.

Phần cuối là các ví dụ số minh họa cho các bước tính toán của phương pháp đưa ra. Nội dung của Chương 3 được viết dựa trên bài báo [CT2], [CT3] trong Danh mục công trình khoa học đã công bố.

### 3.1 Phương pháp dưới đạo hàm quán tính

#### 3.1.1 Thuật toán và định lý hội tụ

Để giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động  $FEP(\Omega, f)$ , ta giả sử song hàm  $f$ , các ánh xạ  $S_k$  ( $k \in I$ ) đều xác định trên toàn bộ không gian  $\mathbb{H}$  và các tham số thỏa mãn các điều kiện:

- (A<sub>1</sub>) Song hàm  $f$  là  $\beta$ -đơn điệu mạnh, khả dưới vi phân theo biến thứ 2,  $\partial_2 f(x, x)$  compact và liên tục  $L$ -Lipschitz.
- (A<sub>2</sub>) Với mỗi  $k \in I$ , các ánh xạ  $S_k$  là  $\xi_k$ -nửa co và thỏa mãn điều kiện (Z),  $\Omega := \bigcap_{k \in I} \text{Fix}(S_k) \neq \emptyset$ .
- (A<sub>3</sub>) Với mọi  $k \geq 0$ , các tham số dương  $\beta_k, \gamma_k, \tau_k, \lambda_k, \mu_k$  thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < c_1 \leq \beta_k \leq c_2 < 1, \mu_k \leq \eta, \\ \alpha_k \in (0, 1 - \xi_k], \inf_k \alpha_k > 0, \\ 0 < \gamma_k < 1, \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0, \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau_k}{\gamma_k} = 0, \lambda_k \in \left( \frac{\beta}{L^2}, \frac{2\beta}{L^2} \right), a \in (0, 1), \sqrt{1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2} < 1 - a. \end{cases} \quad (3.1)$$

**Thuật toán 3.1. Khởi tạo:** Lấy các điểm bất kỳ  $x^0, x^1 \in \mathbb{H}$ .

**Các bước lặp:**  $k = 1, 2, \dots$

*Bước 1. Tính tham số quán tính*

$$\theta_k = \begin{cases} \min \left\{ \mu_k, \frac{\tau_k}{\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} & \text{nếu } \|x^k - x^{k-1}\| \neq 0, \\ \mu_k & \text{ngược lại.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Bước 2. Tính

$$\begin{cases} w^k = x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1}), \\ \bar{S}_k w^k = (1 - \alpha_k)w^k + \alpha_k S_k w^k, \\ y^k \in \partial_2 f(w^k, w^k) \quad , \\ z^k = (1 - \gamma_k)\bar{S}_k w^k + \gamma_k [w^k - \lambda_k y^k] , \\ \bar{S}_k z^k = (1 - \alpha_k)z^k + \alpha_k S_k z^k, \\ x^{k+1} = (1 - \beta_k)\bar{S}_k w^k + \beta_k \bar{S}_k z^k. \end{cases} \quad (3.3)$$

Bước 3. Đặt  $k := k + 1$  và quay lại Bước 1.

**Bổ đề 3.1.** [72, Lemma 2.6] Cho  $\{s_k\}$  là một dãy các số thực không âm và  $\{p_k\}$  là dãy các số thực. Cho  $\{\alpha_k\}$  là dãy các số thực trong khoảng  $(0, 1)$  sao cho  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$ . Giả sử rằng

$$s_{k+1} \leq (1 - \alpha_k)s_k + \alpha_k p_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nếu  $\limsup_{i \rightarrow \infty} p_{k_i} \leq 0$  với mọi dãy con  $\{s_{k_i}\}$  của  $\{s_k\}$  thỏa mãn

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} (s_{k_i+1} - s_{k_i}) \geq 0,$$

thì  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$ .

Sự hội tụ mạnh của các dãy lặp sinh bởi thuật toán được chứng minh trong Định lý 3.1

**Định lý 3.1.** Giả sử các giả thiết  $(A_1) - (A_3)$  thỏa mãn. Khi đó, dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 3.1 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất  $x^*$  của bài toán FEP( $\Omega, f$ ).

*Chứng minh.* Với mỗi  $\lambda_k > 0$ ,  $y^k \in \partial_2 f(w^k, w^k)$  và  $y^* = Pr_{\partial_2 f(x^*, x^*)}(y^k)$ , theo định nghĩa dưới vi phân, ta có

$$\begin{aligned} f(x^*, w^k) - f(x^*, x^*) &= f(x^*, w^k) \geq \langle y^*, w^k - x^* \rangle, \\ f(w^k, x^*) - f(w^k, w^k) &= f(w^k, x^*) \geq \langle y^k, x^* - w^k \rangle. \end{aligned}$$

Cộng vế vế hai bất đẳng thức trên và sử dụng tính đơn điệu mạnh của song hàm  $f$ , ta thu được

$$\langle y^k - y^*, x^* - w^k \rangle \leq f(x^*, w^k) + f(w^k, x^*) \leq -\beta \|w^k - x^*\|^2.$$

Do  $\partial_2 f(x, x)$  là liên tục  $L$ -Lipschitz trên  $\mathbb{H}$ , ta có

$$\begin{aligned}
& \|w^k - x^*\|^2 - 2\lambda_k \langle y^k - y^*, w^k - x^* \rangle + \lambda_k^2 \|y^k - y^*\|^2 \\
& \leq \|w^k - x^*\|^2 - 2\lambda_k \langle y^k - y^*, w^k - x^* \rangle \\
& \quad + \lambda_k^2 \rho^2 (\partial_2 f(w^k, w^k), \partial_2 f(x^*, x^*)) \\
& \leq \|w^k - x^*\|^2 - 2\lambda_k \beta \|w^k - x^*\|^2 + \lambda_k^2 L^2 \|w^k - x^*\|^2 \\
& = (1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2) \|w^k - x^*\|^2,
\end{aligned}$$

nghĩa là

$$\| [w^k - \lambda_k y^k] - [x^* - \lambda_k y^*] \|^2 \leq (1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2) \|w^k - x^*\|^2. \quad (3.4)$$

Như chúng ta đã biết, song hàm  $f$  đơn điệu mạnh và tập  $\Omega \neq \emptyset$ , do đó bài toán FEP( $\Omega, f$ ) có nghiệm duy nhất  $x^* \in \Omega$ . Theo Bổ đề 2.4 và  $x^* \in \text{Fix}(S_k)$ , ta có

$$\| \bar{S}_k w^k - x^* \|^2 \leq \|w^k - x^*\|^2 - \alpha_k (1 - \xi_k - \alpha_k) \|S_k w^k - w^k\|^2 \leq \|w^k - x^*\|^2. \quad (3.5)$$

Kết hợp lược đồ (3.3), (3.4), (3.5) ta xác định được

$$\begin{aligned}
\|z^k - x^*\| &= \|(1 - \gamma_k) \bar{S}_k w^k + \gamma_k [w^k - \lambda_k y^k] - x^*\| \\
&\leq \gamma_k \| [w^k - \lambda_k y^k] - x^* \| + (1 - \gamma_k) \| \bar{S}_k w^k - x^* \| \\
&\leq \gamma_k \| [w^k - \lambda_k y^k] - [x^* - \lambda_k y^*] \| + \gamma_k \lambda_k \|y^*\| + (1 - \gamma_k) \| \bar{S}_k w^k - x^* \| \\
&\leq \gamma_k \sqrt{1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2} \|w^k - x^*\| + \gamma_k \lambda_k \|y^*\| + (1 - \gamma_k) \|w^k - x^*\| \\
&= [1 - \gamma_k (1 - \delta_k)] \|w^k - x^*\| + \gamma_k \lambda_k \|y^*\|, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

với  $\delta_k := \sqrt{1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2} \in (0, 1 - a)$ . Chứng minh tương tự như (3.5), ta có

$$\| \bar{S}_k z^k - x^* \|^2 \leq \|z^k - x^*\|^2 - \alpha_k (1 - \xi_k - \alpha_k) \|S_k z^k - z^k\|^2 \leq \|z^k - x^*\|^2.$$

Kết hợp bất đẳng thức này, (3.1) và (3.6), thu được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\| &= \|(1 - \beta_k) \bar{S}_k w^k + \beta_k \bar{S}_k z^k - x^*\| \\
&\leq (1 - \beta_k) \| \bar{S}_k w^k - x^* \| + \beta_k \| \bar{S}_k z^k - x^* \| \\
&\leq (1 - \beta_k) \|w^k - x^*\| + \beta_k \|z^k - x^*\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq [1 - \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k)] \|w^k - x^*\| + \beta_k \gamma_k \lambda_k \|y^*\| \\
&\leq [1 - \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k)] (\|x^k - x^*\| + \theta_k \|x^k - x^{k-1}\|) \\
&\quad + \beta_k \gamma_k \frac{2\beta \|y^*\|}{L^2} \\
&\leq [1 - \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k)] \|x^k - x^*\| \\
&\quad + \beta_k \gamma_k \left( \frac{\theta_k}{\beta_k \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| + \frac{2\beta \|y^*\|}{L^2} \right) \\
&\leq [1 - \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k)] \|x^k - x^*\| \\
&\quad + \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k) \left( \frac{\theta_k}{a\beta_k \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| + \frac{2\beta \|y^*\|}{aL^2} \right).
\end{aligned}$$

Từ *Bước 1*, điều kiện (3.1), ta suy ra

$$0 \leq \frac{\theta_k}{\beta_k \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| \leq \frac{\tau_k}{c_1 \gamma_k} \rightarrow 0 \quad \text{khi } k \rightarrow \infty.$$

Điều này nghĩa là  $M = \sup_k \left\{ \frac{\theta_k}{a\beta_k \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| + \frac{2\beta \|y^*\|}{aL^2} \right\} < +\infty$ . Khi đó,

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\| &\leq [1 - \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k)] \|x^k - x^*\| + \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k) M \\
&\leq \max \{ \|x^k - x^*\|, M \}.
\end{aligned}$$

Như vậy

$$\|x^k - x^*\| \leq \max \{ \|x^1 - x^*\|, M \}, \quad \forall k \geq 1.$$

Do đó,  $\{x^k\}$  là dãy bị chặn.

Từ (3.3) ta thấy  $\|w^k - x^k\| = \theta_k \|x^k - x^{k-1}\| < +\infty$ . Áp dụng (3.6), ta suy ra  $\{z^k\}$  và  $\{w^k\}$  là các dãy bị chặn. Từ (3.4) và bất đẳng thức

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{H},$$

ta có

$$\begin{aligned}
\|z^k - x^*\|^2 &= \|(1 - \gamma_k)(\bar{S}_k w^k - x^*) + \gamma_k [w^k - \lambda_k y^k - (x^* - \lambda_k y^*)] - \gamma_k \lambda_k y^*\|^2 \\
&\leq \|(1 - \gamma_k)(\bar{S}_k w^k - x^*) + \gamma_k [w^k - \lambda_k y^k - (x^* - \lambda_k y^*)]\|^2 \\
&\quad - 2\gamma_k \lambda_k \langle A(x^*), z^k - x^* \rangle \\
&\leq (1 - \gamma_k) \|\bar{S}_k w^k - x^*\|^2 + \gamma_k \|w^k - \lambda_k y^k - (x^* - \lambda_k y^*)\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2\gamma_k \lambda_k \langle y^*, z^k - x^* \rangle \\
& \leq (1 - \gamma_k) \|w^k - x^*\|^2 + \gamma_k \delta_k^2 \|w^k - x^*\|^2 - 2\gamma_k \lambda_k \langle y^*, z^k - x^* \rangle \\
& \leq [1 - \gamma_k(1 - \delta_k^2)] \|w^k - x^*\|^2 - 2\gamma_k \lambda_k \langle y^*, z^k - x^* \rangle. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

∀  $w^k = x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1})$ , nên

$$\begin{aligned}
\|w^k - x^*\|^2 &= \|x^k - x^*\|^2 + \theta_k^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2 + 2\theta_k \langle x^k - x^*, x^k - x^{k-1} \rangle \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 + \theta_k^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2 + 2\theta_k \|x^k - x^*\| \|x^k - x^{k-1}\|. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 2.4 với  $x^* \in \text{Fix}(S_k)$ , (3.7), (3.8) và định nghĩa  $x^{k+1}$  trong (3.3), ta xác định được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|(1 - \beta_k)(\bar{S}_k w^k - x^*) + \beta_k(\bar{S}_k z^k - x^*)\|^2 \\
&= (1 - \beta_k) \|\bar{S}_k w^k - x^*\|^2 + \beta_k \|\bar{S}_k z^k - x^*\|^2 \\
&\quad - \beta_k(1 - \beta_k) \|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 \\
&\leq (1 - \beta_k) \|w^k - x^*\|^2 + \beta_k \|z^k - x^*\|^2 \\
&\quad - \beta_k(1 - \beta_k) \|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 \\
&\leq (1 - \beta_k) \|w^k - x^*\|^2 + \beta_k [1 - \gamma_k(1 - \delta_k^2)] \|w^k - x^*\|^2 \\
&\quad - 2\beta_k \gamma_k \lambda_k \langle y^*, z^k - x^* \rangle - \beta_k(1 - \beta_k) \|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 \\
&= [1 - \beta_k \gamma_k(1 - \delta_k^2)] \|w^k - x^*\|^2 - 2\beta_k \gamma_k \lambda_k \langle y^*, z^k - x^* \rangle \\
&\quad - \beta_k(1 - \beta_k) \|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 \\
&\leq [1 - \beta_k \gamma_k(1 - \delta_k^2)] \|x^k - x^*\|^2 + \theta_k^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2 \\
&\quad + 2\theta_k \|x^k - x^*\| \|x^k - x^{k-1}\| - 2\beta_k \gamma_k \lambda_k \langle y^*, z^k - x^* \rangle \\
&\quad - \beta_k(1 - \beta_k) \|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 - \beta_k(1 - \beta_k) \|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 \\
&\leq [1 - \beta_k \gamma_k(1 - \delta_k^2)] \|x^k - x^*\|^2 - \beta_k(1 - \beta_k) \|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 \\
&\quad + \beta_k \gamma_k(1 - \delta_k^2) \sigma_k, \tag{3.9}
\end{aligned}$$

với

$\sigma_k :=$

$$\frac{1}{1 - \delta_k^2} \left\{ \frac{\theta_k^2}{\beta_k \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\|^2 + \frac{2\theta_k}{\beta_k \gamma_k} \|x^k - x^*\| \|x^k - x^{k-1}\| - 2\lambda_k \langle y^*, z^k - x^* \rangle \right\}$$

$$\leq \frac{1}{a(2-a)} \left\{ -2\lambda_k \langle y^*, z^k - x^* \rangle + \left( \frac{\theta_k}{c_1 \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| \right) \theta_k \|x^k - x^{k-1}\| \right. \\ \left. + 2\|x^k - x^*\| \left( \frac{\theta_k}{c_1 \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| \right) \right\}.$$

Ở trên ta đã chứng minh được dãy  $\{x^k\}$  là dãy bị chặn, nên  $\sup_k \sigma_k < +\infty$ .  
Như vậy

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq [1 - \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k^2)] \|x^k - x^*\|^2 - \beta_k (1 - \beta_k) \|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 \\ + \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k^2) \sigma_k. \quad (3.10)$$

Áp dụng Bổ đề 3.1, bất đẳng thức (3.10) cho

$$s_k := \|x^k - x^*\|^2, \alpha_k := \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k^2) \in (0, 1), p_k := \sigma_k,$$

ta có

$$s_{k+1} \leq (1 - \alpha_k) s_k + \alpha_k p_k.$$

Giả sử rằng  $\{s_{k_i}\}$  là dãy con của dãy  $\{s_k\}$  sao cho

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} (s_{k_{i+1}} - s_{k_i}) \geq 0.$$

Khi đó, sử dụng điều kiện (3.1), (3.10), ta suy ra

$$0 \leq c_1 (1 - c_2) \limsup_{i \rightarrow \infty} \|\bar{S}_{k_i} w^{k_i} - \bar{S}_{k_i} z^{k_i}\|^2 \\ \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_{k_i} (1 - \beta_{k_i}) \|\bar{S}_{k_i} w^{k_i} - \bar{S}_{k_i} z^{k_i}\|^2 \\ \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} [s_{k_i} - s_{k_{i+1}} + \beta_{k_i} \gamma_{k_i} (1 - \delta_{k_i}^2) \sigma] \\ \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} (s_{k_i} - s_{k_{i+1}}) \\ = - \liminf_{i \rightarrow \infty} (s_{k_{i+1}} - s_{k_i}) \\ \leq 0.$$

Do đó,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\bar{S}_{k_i} w^{k_i} - \bar{S}_{k_i} z^{k_i}\| = 0. \quad (3.11)$$

Mặt khác, lược đồ (3.3) cho thấy

$$\|z^k - \bar{S}_k w^k\| = \gamma_k \|w^k - \lambda_k y^k - \bar{S}_k w^k\|,$$

nên

$$\|z^{k_i} - \bar{S}_{k_i} w^{k_i}\| = \gamma_{k_i} \|w^{k_i} - \lambda_{k_i} y^{k_i} - \bar{S}_{k_i} w^{k_i}\|.$$

Như vậy, từ (3.8), dãy  $\{x^k\}$  bị chặn, dẫn đến dãy  $\{w^k\}$  cũng bị chặn. Mà

$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$  suy ra

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|z^{k_i} - \bar{S}_{k_i} w^{k_i}\| = 0. \quad (3.12)$$

Từ cách xác định ánh xạ  $S_{k_i}$ ,  $\bar{S}_{k_i} z^{k_i} = (1 - \alpha_{k_i}) z^{k_i} + \alpha_{k_i} S_{k_i} z^{k_i}$ , (3.11) và

(3.12), ta có

$$\begin{aligned} \alpha_{k_i} \|z^{k_i} - S_{k_i} z^{k_i}\| &= \|z^{k_i} - \bar{S}_{k_i} z^{k_i}\| \\ &\leq \|z^{k_i} - \bar{S}_{k_i} w^{k_i}\| + \|\bar{S}_{k_i} w^{k_i} - \bar{S}_{k_i} z^{k_i}\| \\ &\rightarrow 0, \text{ khi } i \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Kết hợp (3.13), giả thiết  $\inf_k \alpha_k > 0$  dẫn đến

$$\|z^{k_i} - S_{k_i} z^{k_i}\| \rightarrow 0, \text{ khi } i \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra  $\limsup_{i \rightarrow \infty} p_{k_i} \leq 0$ . Thật vậy, từ điều kiện (3.1), ta thấy

$$p_k = \sigma_k$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{a(2-a)} \left\{ -2\lambda_k \langle y^*, z^k - x^* \rangle + \left( \frac{\theta_k}{c_1 \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| \right) \theta_k \|x^k - x^{k-1}\| \right. \\ &\quad \left. + 2\|x^k - x^*\| \left( \frac{\theta_k}{c_1 \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| \right) \right\} \\ &\leq \frac{1}{a(2-a)} \left\{ -2\lambda_k \langle y^*, z^k - x^* \rangle + \frac{\tau_k}{\gamma_k} \left( \frac{\mu_k \|x^k - x^{k-1}\|}{c_1} + \frac{2\|x^k - x^*\|}{c_1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Vì  $\lambda_k \in (\frac{\beta}{L^2}, \frac{2\beta}{L^2})$ , các dãy  $\{x^k\}$ ,  $\{\mu_k\}$  bị chặn, nên  $\limsup_{i \rightarrow \infty} \langle y^*, x^* - z^{k_i} \rangle \leq 0$  suy ra  $\limsup_{i \rightarrow \infty} p_{k_i} \leq 0$ . Hơn nữa, dãy  $\{z^k\}$  cũng bị chặn, không mất tổng

quát, ta giả sử tồn tại một dãy con  $\{\bar{z}^{k_i}\}$  của  $\{z^{k_i}\}$  sao cho  $\bar{z}^{k_i} \rightharpoonup \bar{x}$  và

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \langle y^*, x^* - z^{k_i} \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle y^*, x^* - \bar{z}^{k_i} \rangle.$$

Từ (3.14), điều kiện (Z) của dãy  $\{S_i\}$  suy ra  $\bar{x} \in \Omega$ . Do đó,

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \langle y^*, x^* - z^{k_i} \rangle = \langle y^*, x^* - \bar{x} \rangle \leq 0.$$

Áp dụng Bổ đề 3.1, ta kết luận được  $x^k \rightarrow x^*$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Ta có điều cần chứng minh. □

### 3.1.2 Một số tính toán thực nghiệm

Trong mục này, trước tiên chúng tôi sẽ thực hiện một số tính toán minh họa sự hội tụ mạnh của các dãy lặp được sinh ra từ thuật toán. Sau đó, để chỉ ra tính hiệu quả của của thuật toán, chúng tôi chọn so sánh Thuật toán đề xuất với Phương pháp chiếu song song (*PPA*) trong [7, Scheme (3.1)] và Phương pháp dưới đạo hàm song song (*PSA*) trong [7, Scheme (4.1)].

**Ví dụ 3.1.** Trong  $\mathbb{H} := l_2$ , các ánh xạ  $S_i, f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  được cho như dưới đây:

$$l_2 := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots)^\top : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty \right\},$$

$$f(x, y) := \langle A(x), y - x \rangle, A(x) := (2x_1, x_2, 2x_3, \dots, 2x_{2i-1}, x_{2i}, \dots)^\top \in \mathbb{H},$$

$$S_1 x := x,$$

$$S_i x := \{y \in \mathbb{H} : y_{2j} = x_{2j}, x_{2j-1} = 0, \quad \forall j \geq 2\}, \quad \forall i \geq 2,$$

với mỗi  $x, y \in \mathbb{H}, i \in I := \{1, 2, \dots\}$ .

Rõ ràng ánh xạ  $S_k$  là 0–nửa co,  $k \in I$ , song hàm  $f$  là 1–đơn điệu mạnh,  $\partial_2 f(x, x)$  liên tục Lipschitz với hệ số liên tục  $L = 1$ . Tập điểm bất động chung  $\Omega$  được xác định như sau:

$$\Omega = \bigcap_{k \in I} \text{Fix}(S_k) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{2i-1}, x_{2i}, \dots)^\top \in \mathbb{H} : x_{2i-1} = 0, \quad \forall i \geq 1\}.$$

Chọn  $\mu_k = 1, \beta_k = \frac{1}{2}, \gamma_k = \tau_k = \frac{1}{k+1}, \lambda_k = \frac{3}{10}, \alpha_k = \frac{1}{2} \in (0, 1 - \xi_k]$  với  $\xi_k = 0$ , do đó  $\sqrt{1 - 2\lambda_k\beta + \lambda_k^2 L^2} = \frac{\sqrt{19}}{5} \in (0, 1)$ . Lấy một dãy bất kỳ  $\{x^k := (x_1^k, x_2^k, \dots)^\top\}$  sao cho  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k x^k - x^k\| = 0$ , ta có

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k x^k - x^k\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_1^k, 0, x_3^k, 0, \dots, x_{2i-1}^k, 0, \dots)^\top\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_1^k)^2 + (x_3^k)^2 + \dots + (x_{2i-1}^k)^2 + \dots} \end{aligned}$$

Điều này cho thấy  $\{x^k\}$  hội tụ mạnh tới một điểm nằm trong  $\Omega$ , như vậy, điều kiện (Z) được thỏa mãn. Lấy  $x^0, x^1 \in \mathbb{H}$ . Sử dụng Thuật toán 3.1,



với mỗi  $k \geq 1$ , ta có

$$\theta_k = \min \left\{ 1, \frac{1}{(k+1)\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} \text{ khi } \|x^k - x^{k-1}\| = 0, \text{ ngược lại } \theta_k = 0,$$

$$w^k = x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1})$$

$$z^1 = (1 - \gamma_1)\bar{S}_1 w^1 + \gamma_1[w^1 - \lambda_1 A(w^1)]$$

$$= (1 - \gamma_1)\bar{S}_1 w^1 + \gamma_1[w^1 - \lambda_1 A(w^1)]$$

$$= \frac{1}{2}\bar{S}_1 w^1 + \frac{1}{2} \left[ w^1 - \frac{1}{2}A(w^1) \right]$$

$$= \left( \frac{7}{10}w_1^1, \frac{17}{20}w_2^1, \dots, \frac{7}{10}w_{2i-1}^1, \frac{17}{20}w_{2i}^1, \dots \right)^\top$$

$$z^k = (1 - \gamma_k)\bar{S}_k w^k + \gamma_k[w^k - \lambda_k A(w^k)]$$

$$= \frac{k}{k+1} \left( \frac{1}{2}w_1^k, w_2^k, \frac{1}{2}w_3^k, w_4^k, \dots \right)^\top + \frac{1}{k+1} \left[ w^k - \frac{3}{10} (2w_1^k, w_2^k, 2w_3^k, w_4^k, \dots)^\top \right]$$

$$= \left( \frac{4-k}{10(k+1)}w_1^k, \frac{7}{10}w_2^k, \dots, \frac{4-k}{10(k+1)}w_{2i-1}^k, \frac{7}{10}w_{2i}^k, \dots \right)^\top, \quad \forall k \geq 2,$$

và

$$x^2 = (1 - \beta_1)\bar{S}_1 w^1 + \beta_1\bar{S}_1 z^1$$

$$= \frac{1}{2}z^1 + \frac{1}{2}\bar{S}_1 z^1$$

$$x^{k+1} = (1 - \beta_k)\bar{S}_k w^k + \beta_k\bar{S}_k z^k$$

$$= \frac{1}{2}z^k + \frac{1}{2}\bar{S}_k z^k$$

$$= \left( \frac{4-k}{20(k+1)}w_1^k, \frac{7}{10}w_2^k, \dots, \frac{4-k}{20(k+1)}w_{2i-1}^k, \frac{7}{10}w_{2i}^k, \dots \right)^\top, \quad \forall k \geq 2.$$

**Ví dụ 3.2.** Trong ví dụ này, xét  $\mathbb{H} := \mathbb{R}^5$ , các ánh xạ  $S_i : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) được xác định như sau: với mỗi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_5)^\top \in \mathbb{R}^5$ ,

$$S_1 x = \left( x_1, \sin x_2, \frac{1}{3}x_3, x_4, \sin^3 x_5 \right)^\top,$$

$$S_k x = \left( x_1, \frac{1}{2}x_2, \sin x_3, \sin^2 x_4, \frac{1}{4}x_5 \right)^\top, \quad \forall k \geq 2.$$

Song hàm  $f : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$  được cho dưới dạng

$$f(x, y) = \langle F(x) + Qy + q, y - x \rangle,$$

với  $A, B, D$  lần lượt là các ma trận vuông, ma trận phản xứng, ma trận chéo  $5 \times 5$  và ma trận  $Q = AA^T + B + D$  (xem [9, 14]),  $q$  là vectơ trong  $\mathbb{R}^5$ . Với  $\eta > 1 + \|Q\|$  ánh xạ  $F$  được xác định bởi

$$F(x) = (\eta x_1 + \eta x_2 + \sin x_1, -\eta x_1 + \eta x_2 + \sin x_2, (\eta - 1)x_3, (\eta - 1)x_4, (\eta - 1)x_5).$$

Rõ ràng, song hàm  $f$  là đơn điệu mạnh với hệ số  $\beta = \eta - \|Q\| - 1$  với điều kiện  $\eta > 1 + \|Q\|$ . Với mỗi vectơ  $x \in \mathbb{R}^5$ , dưới vi phân của  $f$  được tính như sau:

$$\partial_2 f(x, x) = \{F(x) + Qx + q\} \Rightarrow y^k = F(w^k) + Qw^k + q \in \partial_2 f(w^k, w^k).$$

Và  $\partial_2 f(x, x)$  liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz  $L = \sqrt{2(2\eta^2 + 2\eta + 1)} + \|Q\|$ .

Ta đã chỉ ra  $S_k (k \geq 1)$  là ánh xạ 0–nửa co. Tập điểm bất động chung  $\Omega$  của  $\{S_k\}$  được tính bởi

$$\Omega = \{(x_1, 0, 0, 0, 0)^\top : x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Giả sử rằng dãy  $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^5$  thỏa mãn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(x^k) - x^k\| = 0$ . Khi đó,

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(x^k) - x^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left( 0, \frac{1}{2}x_2^k, x_3^k - \sin x_3^k, x_4^k - \sin^2 x_4^k, \frac{3}{4}x_5^k \right)^\top \right\| = 0,$$

và do đó  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = 0$  với mọi  $i = 2, 3, 4, 5$ . Như vậy, điều kiện (Z) thỏa mãn.

**Thử nghiệm 1.** Trong thử này, các ma trận  $A, B, D$  và vectơ  $q$  được chọn như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -4 & 9 \\ -3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Khi đó,

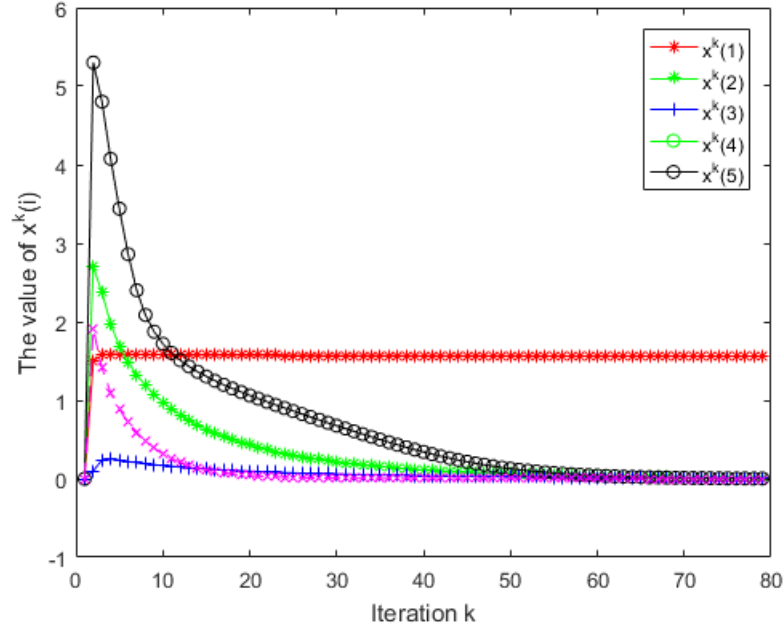
$$\|Q\| \simeq 201.6495, \eta = \|Q\| + 10 \simeq 211.6495, \beta = 9,$$

$$L = \sqrt{2(2\eta^2 + 2\eta + 1)} + \|Q\| \simeq 625.9497.$$

Các tham số trong thuật toán được xác định như sau:  $\lambda_k = \frac{3\beta}{2L^2} \in \left(\frac{\beta}{L^2}, \frac{2\beta}{L^2}\right)$ ,

$$\mu_k = 10, \gamma_k = \frac{1}{k+3}, \tau_k = \frac{1}{k^2+1}, \alpha_k = 0.1 + \frac{1}{k+10}, \beta_k = 0.5 + \frac{1}{2k+10}, \forall k \geq 0. \quad (3.15)$$

Ta thấy, với các dữ liệu tham số ở trên, điều kiện (3.1) thỏa mãn. Dãy  $x^k$  được gọi là  $\epsilon$ -nghiệm của bài toán khi  $\|x^k - x^{k-1}\| \leq \epsilon$ . Kết quả tính toán số của Thuật toán 3.1 được cho trong Hình 3.1 và Bảng 3.1 với nghiệm xấp xỉ thu được là  $x^{78} = (1.5616, 0.0111, 0.0074, 0.0034, -0.0000)^\top$ .



Hình 3.1: Thuật toán 3.1 với  $x^0 = (1.5, 2.7, 0.1, 5.3, 1.9)^\top$ ,  $x^1 = (-1, -2, -5, -7, 9)^\top$  và sai số  $\epsilon = 10^{-3}$ .

Case	$\mu_k$	$\gamma_k$	$\tau_k$	$\alpha_k$	$\lambda_k$	$\beta_k$	No. Iter.	CPU times
1	10	$\frac{1}{k+3}$	$\frac{1}{k^2+1}$	$0.10 + \frac{1}{k+10}$	$\frac{3\beta}{2L^2}$	$0.5 + \frac{1}{2k+10}$	78	0.0469
2	20	$\frac{1}{4k+3}$	$\frac{1}{k^2+15}$	$0.19 + \frac{1}{k+7}$	$\frac{1.4\beta}{L^2}$	$0.6 + \frac{1}{k+19}$	75	0.1563
3	20	$\frac{1}{4k+30}$	$\frac{1}{k^2+115}$	$0.19 + \frac{1}{k+7}$	$\frac{1.4\beta}{L^2}$	$0.6 + \frac{1}{k+19}$	74	0.0313
4	20	$\frac{1}{4k+30}$	$\frac{1}{k^2+115}$	$0.199 + \frac{1}{3k+7}$	$\frac{1.5\beta}{L^2}$	$0.6 + \frac{1}{k+19}$	75	0.0625
5	140	$\frac{1}{4k+30}$	$\frac{1}{k^2+115}$	$0.1 + \frac{1}{k+7}$	$\frac{1.5\beta}{L^2}$	$0.79 + \frac{1}{3k+50}$	77	0.0469
6	140	$\frac{1}{14k+30}$	$\frac{1}{5k^2+115}$	$0.1 + \frac{1}{k+7}$	$\frac{1.5\beta}{L^2}$	$0.79 + \frac{1}{3k+50}$	75	0.0313
7	100	$\frac{1}{3k+5}$	$\frac{1}{k^2+3}$	$0.01 + \frac{1}{k+1}$	$\frac{1.2\beta}{L^2}$	$0.79 + \frac{1}{3k+50}$	72	0.0311
8	10	$\frac{1}{3k+5}$	$\frac{1}{k^2+113}$	$0.01 + \frac{1}{k+1}$	$\frac{1.2\beta}{L^2}$	$0.79 + \frac{1}{3k+50}$	72	0.0311
9	15	$\frac{1}{3k+5}$	$\frac{1}{k^2+3}$	$0.01 + \frac{1}{k+1}$	$\frac{1.2\beta}{L^2}$	$0.2 + \frac{1}{3k+50}$	72	0.0313
10	200	$\frac{1}{k+100}$	$\frac{1}{10k^2+1}$	$0.2 + \frac{1}{k+100}$	$\frac{1.2\beta}{L^2}$	$0.5 + \frac{1}{k+7}$	76	0.0315

Bảng 3.1: Test 1 với các tham số khác nhau, sai số  $\epsilon = 10^{-3}$ .

Case	Start. point $x^0$	Start. point $x^1$	No. Iter.	CPU times
1	$(1, 3, 5, 7, 9)^\top$	$(0, 1, -1, 2, 3)^\top$	78	0.1563
2	$(-1, 2, -3, 4, -5)^\top$	$(0, -1, 1, -2, -3)^\top$	77	0.0313
3	$(0, 2, 0, 4, 0)^\top$	$(1, 1, 1, 1, 1)^\top$	79	0.0156
4	$(2, 4, 6, 8, 10)^\top$	$(3, 5, 7, 9, 11)^\top$	74	0.0469
5	$(1, 2, 0.5, 3, 0)^\top$	$(1, 2, 0.5, 3, 0)^\top$	78	0.0469
6	$(1.2, 2.2, 3.3, 4.4, 5.5)^\top$	$(-2.1, 3.2, -4.3, 5.4, -6.5)^\top$	73	0.0156
7	$(1, 2, 0.5, 3, 0)^\top$	$(-10, 2, -3, 4, -5)^\top$	81	0.0313
8	$(10, 20, 30, 40, 50)^\top$	$(-10, 2, -3, 4, -5)^\top$	78	0.0051
9	$(10, 20, 30, 40, 50)^\top$	$(0, 0, 0, 0, 0)^\top$	111	0.0469
10	$(1.5, 2.7, 0.1, 5.3, 1.9)^\top$	$(-1, -2, -5, -7, 9)^\top$	77	0.0481

Bảng 3.2: Test 1 với các điểm khởi tạo  $x^0, x^1$  khác nhau, với bộ tham số  $\mu_k, \gamma_k, \tau_k, \alpha_k, \lambda_k, \beta_k$  cho trước (3.15).

Case	Iter.			CPU times		
	<i>PPA</i>	<i>PSA</i>	<i>Alg.1</i>	<i>PPA</i>	<i>PSA</i>	<i>Alg.1</i>
1	110	24	94	0.0469	0.0156	0.0313
2	111	937	95	0.0337	0.1250	0.0469
3	114	40	90	0.0483	0.0156	0.0155
4	108	30	93	0.0469	0.0313	0.1032
5	117	281	96	0.0905	0.0938	0.0200
6	96	44	101	0.0532	0.0441	0.1830
7	120	30	95	0.0716	0.0074	0.0171
8	114	159	97	0.0550	0.0663	0.0104
9	101	81	96	0.0712	0.0860	0.0339
10	119	28	93	0.0622	0.0052	0.03301

Bảng 3.3: Kết quả so sánh cho thử 2 với  $\epsilon = 10^{-3}$ .

**Thử nghiệm 2.** Ta sẽ so sánh Thuật toán 3.1 (*Alg.1*) với các Thuật toán *PPA*, *PSA*. Điều kiện dừng của các thuật toán là  $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$ . Các ma trận đầu vào  $A, B, D$  được sinh ngẫu nhiên bởi các câu lệnh  $A = 2 * 5 * rand(5, 5) - 5$ ;  $B = skewdec(5, 1)$ ;  $D = diag(1 : 5)$ . Kết quả so sánh được ghi trong Bảng 3.3 với  $q = (3, 7, 9, 10, -17)^\top$ . Các dữ liệu đầu vào của các thuật toán chọn như sau:

- (i) *PPA*:  $\alpha_{k,i} := 0.01 + \frac{1}{k+100}$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, k \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon_k = 0$ ,  
 $\gamma_k = \frac{1}{7k+10}$ , điểm khởi tạo  $x^0 = (0.25, 0.35, 0.0, 0.1, 0.3)^\top$ .
- (ii) *PSA*:  $\mu = \frac{\beta}{L^2} \in (0, \frac{2\beta}{L^2}) = 0.0016$ ,  $\alpha_{k,i} := 0.1 + \frac{1}{k+5}$ ,  
 $\eta := 50 + \|Q\| = 104.8319$ ,  $\beta_k = \frac{1}{2} \left[ 1 - \gamma_k (1 - \sqrt{1 - 2\mu\beta + \mu^2 L^2}) \right]$ ,  
điểm khởi tạo  $x^0 = (0.25, 0.35; 0, 0.1, 0.3)^\top$ .
- (iii) *Alg.1*: Sử dụng các dữ liệu như (3.15). Điểm khởi tạo  $x^0$  và  $x^1$  chọn như trong Hình 3.1.

Tất cả các tính toán được thực hiện trên MATLAB R2016a, PC with Intel® Core™ i7-7800X CPU @ 3.50 GHz 32 GB Ram. Từ các kết quả tính toán của Thuật toán dưới đạo hàm lai ghép quán tính *Alg.1*, Thuật toán chiếu song song *PPA* và Thuật toán dưới đạo hàm song song *PSA* ở bảng trên, ta có thể thấy

- Tốc độ hội tụ của Thuật toán 3.1 là tương đối tốt và phụ thuộc vào bộ tham số  $\{\mu_k\}, \{\gamma_k\}, \{\tau_k\}, \{\lambda_k\}, \{\beta_k\}$ ;
- Trên không gian  $\mathbb{R}^5$ , thời gian tính toán và số phép lặp của thuật toán đề xuất ít hơn so với các Thuật toán *PPA* và *PSA*.

## 3.2 Nguyên lý bài toán phụ quán tính song song

### 3.2.1 Thuật toán và định lý hội tụ

Giả sử các giả thiết sau được thỏa mãn:

- (A<sub>1</sub>) Ánh xạ  $f : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là  $\beta$ -giả đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz với các hằng số dương  $c_1, c_2$  thỏa mãn  $\beta > c_1$ .
- (A<sub>2</sub>) Với mọi  $i \in I$ , các ánh xạ  $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  là  $\beta_i$ -nửa co và nửa đóng tại không. Ký hiệu  $\Omega := \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i)$ .

Bộ tham số điều khiển được chọn thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} \tau \in (0, \beta - c_1), \{\lambda_k\} \subset [\bar{a}, \hat{a}] \subset (0, 1), \lambda_k^2 + \frac{\tau - 4(\beta - c_1)}{2\tau^2(\beta - c_1)} \lambda_k + \frac{\beta - c_1 - \tau}{\tau^2(\beta - c_1)} \geq 0, \\ \zeta_k \in (0, \frac{1}{\tau \bar{a}}), \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k = +\infty, \tau_k > 0, \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k < +\infty, \\ \mu_k > 0, \gamma_{k,i} \in (\bar{b}, \hat{b}) \subset (0, 1 - \max\{\beta_i : i \in I\}), \quad \forall i \in I. \end{cases} \quad (3.16)$$

Khi đó, thuật toán nguyên lý bài toán phụ quán tính song song (PIAPA) được đề xuất dưới dạng sau.

**Thuật toán 3.2.** Chọn các điểm khởi tạo  $x^0, x^1 \in \mathbb{H}$ .

*Bước 1.* Cho trước dãy lặp  $x^{k-1}$  và  $x^k$ . Tính

$$w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}), \quad (3.17)$$

với

$$\alpha_k = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\tau_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}, \mu_k \right\}, & \text{khi } \|x^k - x^{k-1}\| \neq 0, \\ \mu_k, & \text{ngược lại.} \end{cases} \quad (3.18)$$

Bước 2. Lấy

$$u_i^k = (1 - \gamma_{k,i})w^k + \gamma_{k,i}S_i(w^k).$$

Đặt  $t^k := u_{i_0}^k$ , với  $i_0 \in \operatorname{argmax}\{\|u_i^k - w^k\| : i \in I\}$ .

Bước 3. Tính

$$y^k = \operatorname{argmin} \left\{ \lambda_k f(t^k, x) + \frac{1}{2} \|x - t^k\|^2 : x \in \Omega \right\},$$

$$x^{k+1} = (1 - \zeta_k)t^k + \zeta_k y^k.$$

Cho  $k := k + 1$ , quay trở lại Bước 1.

Chú ý rằng, trong thuật toán trên,  $w^k$  được tính bằng kỹ thuật lặp quán tính,  $t^k$  được tính theo nghĩa song song. Sử dụng nguyên lý bài toán phụ để xây dựng dãy lặp  $y^k$ . Dãy điểm lặp  $x^{k+1}$  được tính toán dựa trên phương pháp lặp Mann. Điểm  $x^k$  sinh bởi Thuật toán 3.2 là một  $\epsilon$ -nghiệm của bài toán  $FEP(\Omega, f)$  nếu  $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$ .

Để chứng minh sự hội tụ của dãy lặp sinh bởi Thuật toán 3.2, ta nhắc lại bổ đề về sự hội tụ của dãy số thực.

**Bổ đề 3.2.** [80, Lemma 2.5] Cho dãy số dương  $\{a_k\}$  và dãy số thực  $\{p_k\}$ . Gọi  $\{\alpha_k\}$  là dãy số thực trong đoạn  $(0, 1)$  thỏa mãn  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$ . Giả sử

$$a_{k+1} \leq (1 - \alpha_k)a_k + b_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Khi đó, nếu  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{\alpha_k} \leq 0$  hoặc  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$ , thì  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

**Định lý 3.2.** Giả sử các giả thiết  $(A_1)$  và  $(A_2)$  được thỏa mãn. Với điều kiện (3.16), dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 3.2 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất  $x^*$  của bài toán  $FEP(\Omega, f)$ .

*Chứng minh.* Gọi  $x^*$  là nghiệm của bài toán  $FEP(\Omega, f)$ . Do  $y^k$  là nghiệm duy nhất của bài toán lồi

$$y^k = \operatorname{argmin} \left\{ \lambda_k f(t^k, x) + \frac{1}{2} \|x - t^k\|^2 : x \in \Omega \right\},$$

ta có

$$0 \in \lambda_k \partial_2 f(t^k, y^k) + y^k - t^k + N_{\Omega}(y^k).$$

Điều này có nghĩa là

$$t^k - y^k - \lambda_k v^k \in N_\Omega(y^k),$$

với  $v^k \in \partial_2 f(t^k, y^k)$ . Sử dụng định nghĩa nón pháp tuyến ngoài  $N_\Omega$  của tập  $\Omega$ , với vectơ  $x^* \in \Omega$  ta có

$$\langle t^k - y^k, x^* - y^k \rangle \leq \lambda_k \langle v^k, x^* - y^k \rangle. \quad (3.19)$$

Mặt khác, từ  $v^k \in \partial_2 f(t^k, y^k)$  dẫn đến

$$\lambda_k [f(t^k, x^*) - f(t^k, y^k)] \geq \lambda_k \langle v^k, x^* - y^k \rangle.$$

Kết hợp điều này và (3.19), ta thu được

$$\langle t^k - y^k, x^* - y^k \rangle \leq \lambda_k [f(t^k, x^*) - f(t^k, y^k)]. \quad (3.20)$$

Do  $\lambda_k > 0$  và  $f$  liên tục kiểu Lipschitz với các hằng số  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ , ta có

$$\lambda_k [f(t^k, x^*) - f(t^k, y^k)] \leq \lambda_k f(y^k, x^*) + \lambda_k c_1 \|y^k - x^*\|^2 + \lambda_k c_2 \|t^k - y^k\|^2. \quad (3.21)$$

Theo định nghĩa của  $x^*, y^k \in \Omega$ , ta có  $f(x^*, y^k) \geq 0$ . Sử dụng giả thiết giả đơn điệu mạnh của  $f$ , suy ra

$$\lambda_k f(y^k, x^*) \leq -\lambda_k \beta \|y^k - x^*\|^2.$$

Kết hợp giữa bất đẳng thức cuối, (3.20), (3.21), ta xác định được

$$\begin{aligned} \langle t^k - y^k, x^* - y^k \rangle &= \frac{1}{2} (\|y^k - x^*\|^2 + \|t^k - y^k\|^2 - \|t^k - x^*\|^2) \\ &\leq \lambda_k [f(t^k, x^*) - f(t^k, y^k)] \\ &\leq \lambda_k f(y^k, x^*) + \lambda_k c_1 \|y^k - x^*\|^2 + \lambda_k c_2 \|t^k - y^k\|^2 \\ &\leq -\lambda_k \beta \|y^k - x^*\|^2 + \lambda_k c_1 \|y^k - x^*\|^2 + \lambda_k c_2 \|t^k - y^k\|^2. \end{aligned}$$

Chú ý rằng đẳng thức đầu được suy ra từ mối quan hệ

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2} (\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a - b\|^2) \quad \forall a, b \in \mathbb{H}.$$

Do đó

$$(1 + 2\lambda_k \beta - 2\lambda_k c_1) \|y^k - x^*\|^2 \leq \|t^k - x^*\|^2 - (1 - 2\lambda_k c_2) \|y^k - t^k\|^2. \quad (3.22)$$



Từ điều kiện (3.16), ta thấy

$$\tau \in (0, \beta - c_1), \quad \{\lambda_k\} \subset [\bar{a}, \hat{a}] \subset (0, 1), \quad \lambda_k^2 + \frac{\tau - 4(\beta - c_1)}{2\tau^2(\beta - c_1)}\lambda_k + \frac{\beta - c_1 - \tau}{\tau^2(\beta - c_1)} \geq 0,$$

dẫn đến

$$0 < \frac{1}{1 + 2\lambda_k\beta - 2\lambda_k c_1} \leq (1 - \tau\lambda_k)^2.$$

Sử dụng (3.22), ta có

$$\|y^k - x^*\|^2 \leq (1 - \tau\lambda_k)^2 \|t^k - x^*\|^2 - \frac{1 - 2\lambda_k c_2}{1 + 2\lambda_k\beta - 2\lambda_k c_1} \|y^k - t^k\|^2. \quad (3.23)$$

Mặt khác, từ (3.17) và (3.18), ta có

$$\begin{aligned} \|w^k - x\| &= \|x^k - \alpha_k(x^k - x^{k-1}) - x\| \\ &\leq \|x^k - x\| + \alpha_k \|x^k - x^{k-1}\| \\ &\leq \|x^k - x\| + \tau_k \quad \forall x \in \mathbb{H}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Với mỗi  $\bar{x} \in \Omega$ , từ *Bước 2* và *Bổ đề 2.4*, ta có đánh giá

$$\begin{aligned} \|t^k - \bar{x}\|^2 &= \|u_{i_0}^k - \bar{x}\|^2 \\ &= \|(1 - \gamma_{k,i_0})w^k + \gamma_{k,i_0}S_{i_0}(w^k) - \bar{x}\|^2 \\ &\leq \|w^k - \bar{x}\|^2 - \gamma_{k,i_0}(1 - \gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0})\|S_{i_0}(w^k) - w^k\|^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Kết hợp *Bước 3*, (3.23), (3.24) và (3.25), ta xác định được

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| &= \|(1 - \zeta_k)t^k + \zeta_k y^k - x^*\| \\ &\leq (1 - \zeta_k)\|t^k - x^*\| + \zeta_k\|y^k - x^*\| \\ &\leq (1 - \zeta_k)\|t^k - x^*\| + \zeta_k(1 - \tau\lambda_k)\|t^k - x^*\| \\ &= (1 - \tau\zeta_k\lambda_k)\|t^k - x^*\| \\ &\leq (1 - \tau\zeta_k\lambda_k)\|w^k - x^*\| \\ &\leq (1 - \tau\zeta_k\lambda_k)(\|x^k - x^*\| + \tau_k) \\ &\leq (1 - \tau\zeta_k\lambda_k)\|x^k - x^*\| + \tau_k \\ &\leq (1 - \tau\bar{a}\zeta_k)\|x^k - x^*\| + \tau_k. \end{aligned}$$

Áp dụng *Bổ đề 3.2* cho  $a_k := \|x^k - x^*\|^2$ ,  $\alpha_k := \tau\bar{a}\zeta_k$ ,  $b_k := \tau_k$ , và điều kiện (3.16), ta nhận được  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|^2 = 0$ .

□

### 3.2.2 Một số tính toán

Trong mục ứng dụng này, chúng tôi sẽ thực hiện một số tính toán số. Thuật toán (PIAPA) đề xuất sẽ được so sánh với Thuật toán chiếu song song (PPA) ([CT1], Lược đồ 3.1) và Thuật toán kiểu dưới gradient (STA) của Iiduka H. [46, Algorithm 3.2] với  $T := S_n S_{n-1} \cdots S_2 S_1$ .

**Ví dụ 3.3.** Ta sử dụng hàm cân bằng  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Song hàm này được giới thiệu trong [70], sau đó là [9, 12], có dạng

$$f(x, y) = \langle F(x) + Qy + q, y - x \rangle, \quad (3.26)$$

với  $A$  là ma trận  $m \times m$ ,  $B$  là  $m \times m$  ma trận phản xứng,  $D$  là trận đường chéo  $m \times m$ ,  $Q = AA^T + B + D$  và  $q$  là vectơ trong  $\mathbb{R}^m$ ,  $\xi > 1 + \|Q\|$ . Ánh xạ  $F$  được xác định như sau

$$F(x) = (\xi x_1 + \xi x_2 + \sin(x_1), -\xi x_1 + \xi x_2 + \sin(x_2), (\xi - 1)x_3, \dots, (\xi - 1)x_m)^\top.$$

Chúng minh tương tự như Bổ đề [70, Lemma 6.1], tác giả Anh trong [9] đã chỉ ra rằng

- Nếu  $\xi > 1 + \|Q\|$  thì  $f$  là đơn điệu mạnh với hệ số  $\beta = \xi - 1 - \|Q\|$ ;
- Ánh xạ  $F$  là  $L$ -liên tục Lipschitz, với  $L = \sqrt{2(2\xi^2 + 2\xi + 1)}$ ;
- $f$  liên tục kiểu Lipschitz với các hằng số  $c_1, c_2$  thỏa mãn  $2\sqrt{c_1 c_2} \geq L + \|Q\|$ .

Tiếp theo, ta xét tập ràng buộc  $C$ , các ánh xạ  $S_1, S_2, S_3$  được xây dựng như sau.

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x, e^\top x \leq g\}, e \in \mathbb{R}^m, g \in \mathbb{R}, \\ S_1(x) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \\ S_2(x) &= Pr_C(x), C = D \cap \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m : x_i \leq 3\}, \\ S_3(x) &= Pr_D(x). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Khi đó,  $\Omega = \bigcap_{i \in I} Fix(S_i)$ . với mỗi  $i \in I = \{1, 2, 3\}$ , ánh xạ  $S_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \Omega$  là không giãn.

**Thử nghiệm 1.** Xét Thuật toán (PIAPA) trong  $\mathbb{R}^5$ . Các ma trận  $A, B, D$ , các vectơ  $q, e$  và số thực  $g$  được chọn ngẫu nhiên như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -0.5 & 0 & -2 \\ -0.5 & 0.5 & -0.8 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & 7 \\ -6 & 0.5 & 8 & 2 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1.25 & -1 & 0 \\ -0.5 & 1.25 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 8 \\ 22 \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 10 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, g = 15.$$

Ta dễ dàng tính được

$$\text{eig}(Q) = \{197.5373, 135.0908, 30.3720, 7.4079, 3.9820\}, \|Q\| = 197.7064,$$

vì thế

$$L := \max\{t : t \in \text{eig}(Q)\} = 197.5373 \text{ and } \beta := \min\{t : t \in \text{eig}(Q)\} = 3.9820.$$

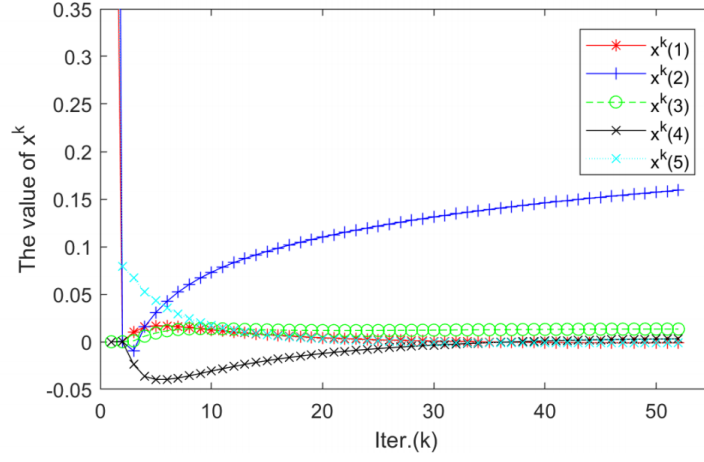
Lấy  $\xi = 250$ ,  $c_1 = 50$ . Từ  $2\sqrt{c_1 c_2} \geq L + \|Q\|$ ,  $\beta = \xi - 1 - \|Q\|$ , dẫn đến

$$\beta = 51.2936, c_2 \geq \frac{(L + \|Q\|)^2}{4c_1} = 781.0879.$$

Các tham số thỏa mãn điều kiện (3.16) được chọn như sau:

$$\begin{cases} \tau = 0.001 \in (0, \beta - c_1) = (0, 1.2936), \bar{a} = 0.001, \hat{a} = 0.8668, \\ \lambda_k = 0.01 + \frac{1}{10k+9} \in (0, 0.4997), \\ \zeta_k = \frac{1}{5k+1} \in (0, \frac{1}{\tau\bar{a}}), \mu_k = \frac{k}{10k+1} > 0, \tau_k = \frac{1}{20k^2+7}, \bar{b} = 0.001, \hat{b} = 0.9882, \\ \gamma_{k,i} = 0.01 + \frac{1}{30k+100}, \end{cases}$$

với  $a := \frac{\tau - 4(\beta - c_1)}{2\tau^2(\beta - c_1)}$ ,  $b := \frac{\beta - c_1 - \tau}{\tau^2(\beta - c_1)}$  and  $\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = 0.4997$ . Kết quả tính toán với điểm khởi tạo  $x^0 = (1, 2, 0, 0, 1)^\top$ ,  $x^1 = (1, 2, 1, 3, 0)^\top$  và sai số  $\epsilon = 10^{-3}$  được cho trong Hình 3.2 và Bảng 3.4.



Hình 3.2: Sự hội tụ của dãy  $\{x^k\}$  trong thuật toán (PIAPA) với điều kiện dừng  $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon = 10^{-3}$ .  
 Nghiệm xấp xỉ  $x^{51} = (0.0000, 0.1593, 0.0133, 0.0032, 0.0000)^\top$ .

Test	$\tau_k$	$\mu_k$	$\gamma_{ki}$	$\lambda_k$	$\zeta_k$	Iter.	Times
1	$\frac{1}{(20k+7)^2}$	1	$0.01 + \frac{1}{30k+100}$	$0.01 + \frac{1}{10k+9}$	$\frac{1}{5k+1}$	51	6.8750
2	$\frac{1}{(30k+9)^2}$	$1 + \frac{1}{2k+1}$	$0.001 + \frac{1}{100k+8}$	$0.02 + \frac{1}{5k+7}$	$\frac{1}{7k+5}$	246	8.1719
3	$\frac{1}{(20k+7)^2}$	$1 + \frac{1}{2k+1}$	$0.001 + \frac{1}{30k+100}$	$0.01 + \frac{1}{10k+9}$	$\frac{1}{5k+1}$	230	9.9531
4	$\frac{1}{(100k+7)^2}$	$1 + \frac{1}{2k+1}$	$0.001 + \frac{1}{30k+100}$	$0.01 + \frac{1}{10k+9}$	$\frac{1}{5k+1}$	132	5.6563
5	$\frac{1}{100k^2+7}$	$1 + \frac{1}{2k+1}$	$0.0001 + \frac{1}{100k+9}$	$0.01 + \frac{1}{10k+9}$	$\frac{1}{5k+1}$	19	0.6719
6	$\frac{1}{20k^2+7}$	$1 + \frac{1}{2k+1}$	$0.001 + \frac{1}{30k+100}$	$0.05 + \frac{1}{50k+7}$	$\frac{1}{5k+1}$	64	2.5938
7	$\frac{1}{20k^2+7}$	$1 + \frac{1}{2k+1}$	$0.001 + \frac{1}{30k+100}$	$0.05 + \frac{1}{50k+7}$	$\frac{1}{15k+6}$	203	6.0781
8	$\frac{1}{20k^2+7}$	$8 + \frac{1}{10k+1}$	$0.001 + \frac{1}{30k+100}$	$0.05 + \frac{1}{50k+7}$	$\frac{1}{15k+6}$	201	6.0156
9	$\frac{5}{100k^2+9}$	$8 + \frac{1}{10k+1}$	$0.001 + \frac{1}{30k+100}$	$0.02 + \frac{1}{10k+21}$	$\frac{1}{15k+6}$	399	11.7031
10	$\frac{1}{10k^2+6}$	$2 + \frac{1}{20k+1}$	$0.0005 + \frac{1}{30k+100}$	$0.02 + \frac{1}{10k+21}$	$\frac{1}{15k+6}$	236	7.0625

Bảng 3.4: Phép lặp (Iter.) và CPU times (Times) với bộ tham số khác nhau.

**Thử nghiệm 2.** So sánh Thuật toán (*PIAPA*) với hai Thuật toán: (*PPA*) và (*STA*). Cho  $e = (3, -5, 10, 3, 7)^\top$ ,  $g = 15$ , các ma trận  $B, D, E$  và vectơ  $q$  được sinh ngẫu nhiên bởi các câu lệnh  $A = 3 * rand(5, 5)$ ;  $B = skewdec(5, 1)$ ;  $D = 3 * diag(1 : 5)$ ;  $q = rand(5, 1)$  trong MATLAB. Điều kiện dừng của các thuật toán là  $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon = 10^{-3}$ . Các dữ liệu khác được cho như sau:

- (a) Thuật toán (*PIAPA*): Điểm khởi tạo  $x^0 = (1, 2, 0, 0, 1)^\top$ ,  $x^1 = (1, 2, 1, 3, 0)^\top$ ,  
 $\tau_k = \frac{1}{(10k+6)^2}$ ,  $\mu_k = 0.1 + \frac{1}{20k+1}$ ,  $\gamma_{k,i} = 0.0001 + \frac{2}{100k+9}$ ,  $\lambda_k = 0.02 + \frac{1}{10k+21}$   
và  $\zeta_k = \frac{1}{15k+6}$ .
- (b) (*PPA*):  $\alpha_{k,i} := 0.001 + \frac{1}{k+100}$  với mọi  $i \in I$ ,  $\epsilon_k = 0$ ,  $\tau_k = 0$ ,  $\gamma_k = \frac{1}{7k+10}$ ,  
với mọi  $k \in \mathbb{N}$ , điểm khởi tạo  $x^0 = (1, 2, 0, 0, 1)^\top$ .
- (c) (*STA*):  $\mu = 1.65 \frac{\beta}{L^2} \in (0, \frac{2\beta}{L^2})$  với  $\beta = \min\{m : m \in eig(Q)\}$  và  
 $L = \max\{k : k \in eig(Q)\}$ . Tham số  $\lambda_k := \frac{1}{\sqrt{3k+5}}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) thỏa  
mãn các điều kiện

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}} = 0.$$

Điểm khởi tạo:  $x^0 = (1, 2, 0, 0, 1)^\top$ .

Kết quả tính toán được thể hiện ở Bảng 3.5.

Tests	No. Iter.			CPU times		
	( <i>PPA</i> )	( <i>STA</i> )	( <i>PIAPA</i> )	( <i>PPA</i> )	( <i>STA</i> )	( <i>PIAPA</i> )
1	153	6093	157	10.5601	297.0412	4.6406
2	253	1105	1158	22.5024	116.8923	32.5781
3	96	3205	1497	7.9941	105.9602	42.1406
4	184	9402	941	12.6981	326.8830	13.0551
5	1104	4057	138	210.4831	130.8024	7.0884
6	8302	3592	297	170.5241	90.8540	7.5015
7	130	2905	94	11.0938	143.9054	1.4431
8	342	6605	164	54.0951	373.7548	6.5201
9	361	403	43	80.5629	294.8840	0.9662
10	126	3055	702	10.0741	109.0413	15.7724

Bảng 3.5: Kết quả so sánh.

Test	$\tau_k$	$\mu_k$	$\gamma_{ki}$	$\lambda_k$	$\zeta_k$	Iter.	Times
1	$\frac{1}{(20k+7)^2}$	1	$0.01 + \frac{1}{30k+100}$	$0.01 + \frac{1}{10k+9}$	$\frac{1}{5k+1}$	51	6.8750
2	$\frac{1}{(30k+9)^2}$	$1 + \frac{1}{2k+1}$	$0.001 + \frac{1}{100k+8}$	$0.02 + \frac{1}{5k+7}$	$\frac{1}{7k+5}$	246	8.1719
3	$\frac{1}{(20k+7)^2}$	$1 + \frac{1}{2k+1}$	$0.001 + \frac{1}{30k+100}$	$0.01 + \frac{1}{10k+9}$	$\frac{1}{5k+1}$	230	9.9531
4	$\frac{1}{(100k+7)^2}$	$1 + \frac{1}{2k+1}$	$0.001 + \frac{1}{30k+100}$	$0.01 + \frac{1}{10k+9}$	$\frac{1}{5k+1}$	132	5.6563
5	$\frac{1}{100k^2+7}$	$1 + \frac{1}{2k+1}$	$0.0001 + \frac{1}{100k+9}$	$0.01 + \frac{1}{10k+9}$	$\frac{1}{5k+1}$	19	0.6719
6	$\frac{1}{20k^2+7}$	$1 + \frac{1}{2k+1}$	$0.001 + \frac{1}{30k+100}$	$0.05 + \frac{1}{50k+7}$	$\frac{1}{5k+1}$	64	2.5938
7	$\frac{1}{20k^2+7}$	$1 + \frac{1}{2k+1}$	$0.001 + \frac{1}{30k+100}$	$0.05 + \frac{1}{50k+7}$	$\frac{1}{15k+6}$	203	6.0781
8	$\frac{1}{20k^2+7}$	$8 + \frac{1}{10k+1}$	$0.001 + \frac{1}{30k+100}$	$0.05 + \frac{1}{50k+7}$	$\frac{1}{15k+6}$	201	6.0156
9	$\frac{5}{100k^2+9}$	$8 + \frac{1}{10k+1}$	$0.001 + \frac{1}{30k+100}$	$0.02 + \frac{1}{10k+21}$	$\frac{1}{15k+6}$	399	11.7031
10	$\frac{1}{10k^2+6}$	$2 + \frac{1}{20k+1}$	$0.0005 + \frac{1}{30k+100}$	$0.02 + \frac{1}{10k+21}$	$\frac{1}{15k+6}$	236	7.0625

Bảng 3.6: Số phép lặp (Iter.) và thời gian tính toán (Times) với các tham số khác nhau.

### Kết luận Chương 3

Trong chương này, chúng tôi đề xuất hai thuật toán mới có sử dụng kỹ thuật lặp quán tính để giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động. Trong thuật toán đầu tiên, kỹ thuật lặp quán tính được dùng để xác định  $\omega^k$ , từ đó sử dụng kỹ thuật dưới đạo hàm tính được  $y^k \in \partial_2 f(w^k, w^k)$ .

Thuật toán thứ hai tiếp tục sử dụng kỹ thuật lặp quán tính xác định  $\omega^k$  ở *Bước 1*, sau đó tính  $u_i^k$  ở *Bước 2* qua kỹ thuật chiếu song song. Nguyên lý bài toán phụ và phép lặp Mann được sử dụng ở *Bước 3* khi tính dãy lặp  $x^{k+1}$ .

Sự hội tụ mạnh của các dãy lặp tạo bởi hai thuật toán được chứng minh trong các Định lý 3.1 và Định lý 3.2. Áp dụng thuật toán đã đề xuất cho các Ví dụ tính toán 3.1 - 3.3.

# KẾT LUẬN

## 1. Kết quả đạt được

Luận án nghiên cứu đề xuất một số phương pháp mới giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động của các ánh xạ nửa co trong một không gian Hilbert thực  $\mathbb{H}$  và đạt được một số kết quả chính sau đây:

- (i) Đề xuất hai thuật toán mới giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động của các ánh xạ nửa co: Phương pháp chiếu song song và phương pháp dưới đạo hàm song song. Sự hội tụ mạnh của các thuật toán được chứng minh trong các Định lý 2.1 và Định lý 2.2 dưới giả thiết song hàm  $f$  là đơn điệu mạnh và có tập dưới vi phân xấp xỉ là liên tục Lipschitz trên tập  $C$ . Kết quả này được công bố trong [CT1].
- (ii) Đề xuất thuật toán Dưới đạo hàm lai ghép quán tính giải bài toán cân bằng trên tập ràng buộc là giao của các tập điểm bất động của các ánh xạ nửa co (thỏa mãn điều kiện  $(Z)$ ): Dưới giả thiết đơn điệu mạnh và liên tục kiểu Lipschitz của song hàm  $f$ , các dãy lặp sinh bởi thuật toán hội tụ mạnh tới một nghiệm duy nhất của bài toán. Kết quả này được công bố trong bài báo [CT2].
- (iii) Đề xuất thuật toán Phương pháp nguyên lý bài toán phụ quán tính song song giải bài toán cân bằng trên tập điểm bất động: Dưới giả thiết giả đơn điệu mạnh và liên tục kiểu Lipschitz của song hàm  $f$ , các dãy lặp sinh bởi thuật toán hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất của bài toán. Kết quả này được công bố trong bài báo [CT3].
- (iv) Nghiên cứu miền ràng buộc mở rộng của bài toán cân bằng, luận án đề xuất Phương pháp chiếu dưới đạo hàm tăng cường mới để giải bài toán cân bằng trên giao của tập điểm bất động và tập nghiệm của một

bài toán cân bằng khác. Ý tưởng của phương pháp đề xuất được dựa trên ý tưởng của phương pháp đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng, kỹ thuật lặp điểm bất động và kỹ thuật chiếu song song. Sự hội tụ mạnh của các dãy lặp được chỉ ra. Kết quả này được công bố trong bài báo [CT4].

- (v) Các tính toán số trong không gian vô hạn và hữu hạn chiều được thực hiện để minh họa cho các bước tính toán trong các thuật toán đề xuất và sự hội tụ của các dãy lặp trên phần mềm MATLAB. Mỗi thuật toán đề xuất đều được so sánh với một số thuật toán thông dụng khác. Các tính toán được chỉ ra trong các bài báo đã xuất bản.

## 2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh những kết quả đã đạt được trong luận án, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu theo các hướng mở sau:

- Đánh giá sai số và tốc độ hội tụ của các dãy lặp  $\{x^k\}$  và  $\{y^k\}$  trong các thuật toán đề xuất;
- Áp dụng các thuật toán đã được nghiên cứu cho một số mô hình thực tiễn;
- Tính toán độ phức tạp của các thuật toán đề xuất.



# DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ

[CT1] Anh, P.N., Hong, N.V., *New projection methods for equilibrium problems over fixed point sets*. Optimization Letters, 2021, **15** (2), 627-648 (ISSN: 1862-4472, SCIE, Q1).

[CT2] Anh, P.N., Kim, J.K., Hien, N.D., Hong, N.V., *Strong convergence of inertial hybrid subgradient methods for solving equilibrium problems in Hilbert spaces*. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2023, **24** (3), 499-514 (ISSN: 1345-4773, SCIE, Q2).

[CT3] Hien, N.D., Hong, N.V., Kim, J.K., *Auxiliary problem principle extended to equilibrium problems over the intersection of fixed point sets*. Accepted by Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2023 (ISSN: 1345-4773, SCIE, Q2).

[CT4] Anh, P.N., Hong, N.V., Gibali, A., *Inexact simultaneous projection method for solving bilevel equilibrium problems*. Fixed Point Theory, 2023, **24** (2), 487-506 (ISSN: 1583-5022, SCIE, Q2).

# Tài liệu tham khảo

## Tiếng Việt

- [1] Phạm Ngọc Anh, *Các phương pháp tối ưu và ứng dụng*, NXB Thông tin và Truyền thông, Hà Nội, 2015.
- [2] Lê Dũng Mưu, *Nhập môn các phương pháp tối ưu*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1998.
- [3] Hoàng Tụy, *Hàm thực và giải tích hàm*, Viện toán học, Hà Nội, 2003.

## Tiếng Anh

- [4] Alvarez, F., *Weak convergence of a relaxed and inertial hybrid projection-proximal point algorithm for maximal monotone operators in Hilbert space*, SIAM Journal on Optimization, 2004, **14**, 773-782.
- [5] Anh, P.N., *A hybrid extragradient method extended to fixed point problems and equilibrium problems*, Optimization, 2013, **62** (2), 271-283.
- [6] Anh, P.N., *A new extragradient iteration algorithm for bilevel variational inequalities*, Acta Mathematica Vietnamica, 2012, **37**, 95-107.
- [7] Anh, P.N., *Hybrid inertial contraction algorithms for solving variational inequalities with fixed point constraints in Hilbert spaces*, Acta Mathematica Vietnamica, 2022, **47**, 743-753.
- [8] Anh, P.N., Hai, T.N., Tuan, P.M., *On ergodic algorithms for equilibrium problems*, Journal of Global Optimization, 2016, **64** (1), 179-195.

- [9] Anh, P.N., Anh, T.T.H., Hien, N.D., *Modified basic projection methods for a class of equilibrium problems*, Numerical Algorithms, 2018, **79** (1), 139-152.
- [10] Anh, P.N., Le Thi, H.A., *New subgradient extragradient methods for solving monotone bilevel equilibrium problems*, Optimization, 2019, **68** (11), 2097-2122.
- [11] Anh, P.N., Ansari, Q.H., *Auxiliary problem technique for hierarchical equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 2021, **188** (3), 882-912.
- [12] Anh, P.N., Ansari, Q.H., Tu, H.P., *DC auxiliary principle methods for solving lexicographic equilibrium problems*, Journal of Global Optimization, 2023, **85**, 129-153.
- [13] Anh, P.N., Kim, J.K., Muu, L.D., *An extragradient algorithm for solving bilevel pseudomonotone variational inequalities*, Journal of Global Optimization, 2012, **52**, 627-639.
- [14] Anh, P.N., Hoai An. L.T., *New subgradient extragradient methods for solving monotone bilevel equilibrium problems*, Optimization, 2019, **68** (11), 2097-2122.
- [15] Anh, P.K., Chung, C.V., *Parallel hybrid methods for a finite family of relatively nonexpansive mappings*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 2014, **35** (6), 649-664.
- [16] Anh, P.N., Anh T.T.H., Kuno, T., *Strong convergence theorems for variational inequalities on the solution set of Ky Fan inequalities*, Acta Mathematica Vietnamica, 2017, **42**, 761-773.
- [17] Balakrishnan, A.V. *Applied functional analysis*, Springer, 1981.
- [18] H.H. Bauschke, P.L. Combettes, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, Springer, New York, 2011.

- [19] Bianchi, M., Schaible, S., *Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 1996, **90**, 31-43.
- [20] Bigi, G., Castellani, M. , Pappalardo, M., Passacantando, M., *Existence and Solution Methods for Equilibria*, European Journal of Operational Research, 2013, **227**, 1-11.
- [21] Bigi, G., Castellani, M. , Pappalardo, M., Passacantando, M., *Nonlinear programming techniques for equilibria*, Springer, 2019.
- [22] Blum, E., Oettli, W., *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math Study, 1994, **63**, 123–145.
- [23] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, MASSON, 1987.
- [24] Carl, S., Le, V.K., *Multi-Valued Variational Inequalities and Inclusions*, Springer, 2021.
- [25] Cegielski, A., *Iterative Methods for Fixed Point Problems in Hilbert Spaces*, Springer Verlag, 2013.
- [26] Ceng, L.C., Cubiotti, P., Yao, J.C., *An implicit iterative scheme for monotone variational inequalities and fixed point problems*, Nonlinear Analysis, 2008, **69**, 2445-2457.
- [27] Ceng, L.C., Latif, A., Ansari. Q.H., *Hybrid extragradient method for hierarchical variational inequalities*, Fixed Point Theory Application, 2014, **2014:222**, 1-35.
- [28] Ceng, L.C., Liou, Y.C., Wen, C.F., *A hybrid extragradient method for bilevel pseudomonotone variational inequalities with multiple solutions*, Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 2016, **9**, 4052-4069.
- [29] Ceng, L.C., Liou, Y.C., Wen, C.F., *Hybrid extragradient viscosity method for general system of variational inequalities*, Journal of Inequalities and Applications, 2015, **2015** (150), 1-43.

- [30] Ceng, L.C., Petrusel, A., Yao, Y.C., *Hybrid viscosity extragradient method for systems of variational inequalities, fixed points of nonexpansive mappings, zero points of accretive operators in Banach spaces*, Fixed Point Theory, 2018, **19** (2), 487-501.
- [31] Chadli, O., Chbani, Z., Riahi, H., *Equilibrium problems with generalized monotone bifunctions and applications to variational inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, **105**, 299-323.
- [32] Chan, R.H., Ma, S., Jang, J.F., *Inertial proximal ADMM for linearly constrained separable convex optimization*, SIAM Journal on Imaging Sciences , 2015, **8** (4), 2239-2267.
- [33] Chbani, Z., Riahi, H., *Weak and strong convergence of an inertial proximal method for solving Ky Fan minimax inequalities*, Optimization Letters, 2013, **7**, 185-206.
- [34] Cohen, G., *Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 1980, **32**, 277-305.
- [35] Dempe, S. *Foundations of Bilevel Programming*, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 2002.
- [36] Dinh, B.V., Hung, P.G., Muu, L.D, *Bilevel Optimization as a Regularization Approach to Pseudomonotone Equilibrium Problems*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 2013, **35** (5), 539-563.
- [37] Dong, Q.L., Li, X.H., Kitkuan, D., Cho, Y.J., Kumam, P., *Some algorithms for classes of split feasibility problems involving paramonotone equilibria and convex optimization*, Journal of Inequalities and Applications, 2019, **77**, 1-23.
- [38] Duc, P.M., Muu, L.D., *A splitting algorithm for a class of bilevel equilibrium problems involving nonexpansive mappings*, Optimization, 2016, **65**, 1855-1866.

- [39] Facchinei, F., Pang, J.S., *Finite-dimensional variational inequalities and complementary problems*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [40] Fan, K., *Aminimax inequality and applications*, Academic Press, New York, 1972, **26**, 103-113.
- [41] Giannessi, F., Maugeri, A., Pardalos, P.M., *Equilibrium problems: Nonsmooth optimization and variational inequality models*, Kluwer, 2004.
- [42] Hai, T.N., *Contraction of the proximal mapping and applications to the equilibrium problem*, Optimization, 2017, **66** (3), 381-396.
- [43] Hai, T.N., *Self-adaptive ergodic algorithm for equilibrium problems over the fixed point set*, International Journal of Computer Mathematics, 2019, **96** (4), 853-863.
- [44] Hai, T.N., Thuy, L.Q., *A projected subgradient algorithm for bilevel equilibrium problems and applications*, Journal of Optimization Theory and Applications, 2017, **175** (2), 411-431.
- [45] Hai, T.N., Thuy, L.Q., *Contraction-mapping algorithm for the equilibrium problem over the fixed point set of a nonexpansive semigroup*, Mathematical Modelling and Analysis, 2019, **24** (1), 43-61.
- [46] Iiduka, H., Yamada, I., *A Subgradient-type method for the equilibrium problem over the fixed point set and its applications*, Optimization, 2009, **58**, 251-261.
- [47] Iusem, A.N., Sosa, W., *Iterative algorithms for equilibrium problems*, Optimization, 2003, **52**, 301-316.
- [48] Iusem, A.N., Nasri, M., *Inexact proximal point methods for equilibrium problems in Banach spaces*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 2007, **28**, 1279-1308.
- [49] Kalashnikov, V.V., Kalashnikova, N.I., *Solving two-level variational inequality*, Journal of Global Optimization, 1996, **8**, 289-294.

- [50] Kassay, G., Rădulescu, V.D., *Equilibrium Problems and Applications*, Academic Press, Elsevier, 2019.
- [51] Kinderlehrer, D., Stampacchia, G., *An introduction to variational inequalities and their applications*, New York (NY), Academic Press, 1980.
- [52] Konnov, I.V., *Application of the Proximal Point Method Nonmonotone Equilibrium Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, **119**, 317-333.
- [53] Konnov, I.V., *Combined relaxation methods for variational inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [54] Maingé, P.E., *A hybrid extragradient-viscosity method for monotone operators and fixed point problems*, SIAM Journal on Control and Optimization, 2008, **47**, 1499-1515.
- [55] Maingé, P.E., Moudafi, A., *Coupling viscosity methods with the extragradient algorithm for solving equilibrium problems*, Journal of Nonlinear Convex Analysis, 2008, **9**, 283-294.
- [56] Maingé, P.E., *Projected subgradient techniques and viscosity methods for optimization with variational inequality constraints*, European Journal of Operational Research, 2010, **205**, 501-506.
- [57] Malitsky, Yu.V., *Projected reflected gradient methods for variational inequalities*, SIAM Journal on Optimization, 2015, **25**, 502-520.
- [58] Mann, W.R., *Mean value methods in iteration*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1953, **4**, 506-510.
- [59] Mastroeni, G. *On Auxiliary Principle for Equilibrium Problems*, Kluwer, Dordrecht, 2003, **11**, 289-298.
- [60] Mastroeni, G., *Gap function for equilibrium problems*, Journal of Global Optimization, 2004, **27**, 411-426.

- [61] Mastroeni, G., *On auxiliary principle for equilibrium problems*, Pubblicazione del Dipartimento di Matematica dell'Universita di Pisa, 2000, **3**, 1244-1258.
- [62] Moudafi, A., *Proximal methods for a class of bilevel monotone equilibrium problems*, Journal of Global Optimization, 2010, **47**, 287-292.
- [63] Muu, L.D., *Stability property of a class of Variational Inequalities*, Optimization, 1984, **15** (3), 347-351.
- [64] Muu, L.D., Oettli, W., *Convergence of an Adaptive Penalty Scheme for Finding Constrained Equilibria*, Nonlinear Analysis Mathematics, 1992, **18**, 1159-1166.
- [65] Muu, L.D., Quoc, T.D., *Regularization Algorithms for Solving Monotone Ky Fan Inequalities with Application to a Nash-Cournot Equilibrium Model*, Journal of Optimization Theory and Applications, 2009, **142**, 185-2004.
- [66] Muu, L.D., Quy, N.V., Nguyen, V.H., *On Nash-Cournot Oligopolistic Market Equilibrium Models with Concave Cost Functions*, Journal of Global Optimization, 2007, **41**, 351-364.
- [67] Nikaido, H., Isoda, K., *Note on Noncooperative Convex Games*, Pacific Journal of Mathematics, 1955, **5**, 807-815.
- [68] Noor, M.A., *Auxiliary principle technique for equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 2004, **122**, 371-386.
- [69] Quoc, T.D, Anh, P.N., Muu, L.D., *Dual extragradient algorithms extended to equilibrium problems*, Journal Global of Optimization, 2012, **52**, 139-159.
- [70] Quoc, T.D., Muu, L.D., Hien, N.V., *Extragradient algorithms extended to equilibrium problems*, Optimization, 2008, **57**, 749-776.



- [71] Quoc, T.D., Muu, L.D., *Iterative Methods for Solving Monotone Equilibrium Problems Via Dual Gap Functions*, Computational Optimization and Applications, 2012, **51**, 709–728.
- [72] Saejung, S., Yotkaew, P., *Approximation of zeros of inverse strongly monotone operators in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 2012, **75**, 724-750.
- [73] Santos, P., Scheimberg, S., *An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems*, Computational Applications and Mathematics, 2011, **30**, 91-107.
- [74] Shehu, Y., Dong, Q-L , Jiang, D. *Single projection method for pseudomonotone variational inequality in Hilbert spaces*, Optimization, 2018, **68**, 385-409.
- [75] Takahashi, S., Takahashi, W., *Strong convergence theorem for a generalized equilibrium problem and a nonexpansive mapping in a Hilbert space*, Nonlinear Analysis, 2008, **69**, 1025-1033.
- [76] Tuy, H., *Convex analysis and Global optimization*, Springer, 2015.
- [77] Tseng, P., *A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings*, SIAM Journal on Control and Optimization, 2000, **38**, 431-446.
- [78] Vuong, P.T., Strodiot, J.J, Nguyen V.H., *Projected viscosity subgradient methods for variational inequalities with equilibrium problem constraints in Hilbert spaces*, Journal of Global Optimization, 2014, **59** (1), 173-190.
- [79] Wang, Z.B., Chen, x., Yi, J., *Inertial projection and contraction algorithms with larger step sizes for solving quasimonotone variational inequalities*, Journal of Global Optimization, 2022, **82**, 499–522.
- [80] Xu, H.K., *Iterative algorithms for nonlinear operators*, Journal of the London Mathematical Society, 2002, **66**, 240-256.

- [81] Xu, M.H., Li, M., Yang, C.C., *Neural networks for a class of bi-level variational inequalities*, Journal of Global Optimization, 2009, **44**, 535-552.
- [82] Yamada, I., *The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of non-expansive mappings*, Study in Computational Mathematics, 2001, **8**, 473-504.
- [83] Yamada, I., Ogura, N., *Hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the the fixed point set of certain quasi-nonexpansive mappings*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 2004, **25**, 619-655.
- [84] Yao, Y., Postolache, M., Liou, Y.C., *Coupling Ishikawa algorithms with hybrid techniques for pseudocontractive mappings*, Fixed Point Theory and Applications, 2013, **211**.
- [85] Yuying, T., Dinh, B.V., Kim, D.S., Plubtieng, S., *Extragradient sub-gradient methods for solving bilevel equilibrium problems*, Journal of Inequalities and Applications, 2018, **327**, 1-21.